Analysis III

gehalten von Professor Dr. Winkelmann

WS 11/12

Inoffizielle Mitschrift von Michael Breuer

Inhaltsverzeichnis

0 Integration

- Mehrdimensionale Integration (Volumen).
- Erweiterung der Klasse der integrierbaren Funktionen zur Verbesserung der Konvergenzeigenschaften. Bisher

$$f_n \xrightarrow[\text{gleichmäßig}]{} f \Rightarrow \lim \int f_n(x)dx = \int f(x)dx. \tag{0.1}$$

  Jetzt: schwächere Bedingung entwickeln.

- $\Rightarrow$ "Lebesgue-Integral"
- Beispiel: $\mathbb{Q}$ (abzählbar) $\subset \mathbb{R}$ (überabzählbar)
  $\Rightarrow \mathbb{Q}$ ist sehr viel kleiner als $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \tag{0.2}$$

  Lebesgue-Integral:

$$\int\limits_a^b \chi_Q(x)dx = 0 \,\forall\, a < b \tag{0.3}$$

- Beispiel:

$$f_n(x) = \begin{cases} n, \text{falls } 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0, \text{sonst} \end{cases} \tag{0.4}$$

  f_n ist Treppenfunktion, denn

$$\int\limits_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n}n = 1. \tag{0.5}$$

  f_n konvergiert punktweise

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \,\forall\, x, \tag{0.6}$$

  weil

$$x = 0 \Rightarrow f_n(x) = 0, \;\forall\, n \tag{0.7}$$

$$x > 0 \Rightarrow \exists n \colon x > \frac{1}{n} > 0 \tag{0.8}$$

$$\Rightarrow f_m(x) = 0 \,\forall\, m > n \tag{0.9}$$

Also: $\exists$ Folge von Treppenfunktionen f_n mit

$$\lim f_n = f(x),\ \forall\, x \tag{0.10}$$

wobei $f \equiv 0$ (konstant), aber

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n(x)dx = \int f(x)dx. \tag{0.11}$$

1 Treppenfunktionen

1.1 Definition der charakteristischen Funktion

Sei M eine Menge, $S \subset M$. Die *charakteristische Funktion* von S ist

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, \text{falls } x \in S \\ 0, \text{falls } x \notin S \end{cases} \tag{1.1}$$

1.2 Definition des Intervalls

Ein *Intervall* ist eine zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}$.

1.3 Definition eines Quaders

Eine beschränkte Teilmene $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Quader*, falls es Intervalle $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$ gibt mit $M = I_1 \times \cdots \times I_n$.

1.4 Definiton des Volumen eines Quaders

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, dann ist die Länge von I definiert als:

$$L(I) = \sup\{x \in I\} - \inf\{x \in I\} \tag{1.2}$$

Sei $M = I_1 \times \cdots \times I_n$ ein Quader in $\mathbb{R}^n$. Dann ist das *Volumen von* M definiert als:

$$\mathrm{Vol}(M) = l(I_1) \times \cdots \times l(I_n). \tag{1.3}$$

1.5 Definition der Treppenfunktion

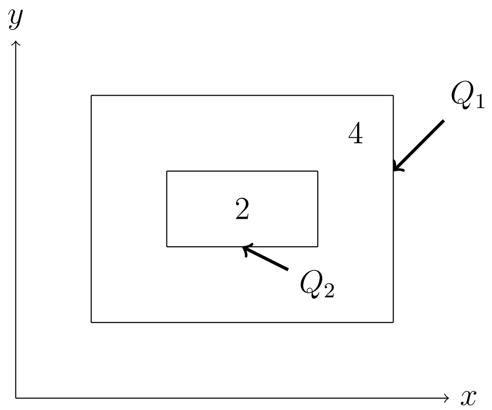
Eine *Treppenfunktion* f auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Funktion der Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{Q_k} \tag{1.4}$$

wobei $m \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{R}, Q_k$ beschränkter Quader.

1.6 Bemerkung zu Treppenfunktionen

Die Treppenfunktionen bilden einen Vektorraum.



$$\Rightarrow 4\chi_{Q_1} - 2\chi_{Q_2} \tag{1.5}$$

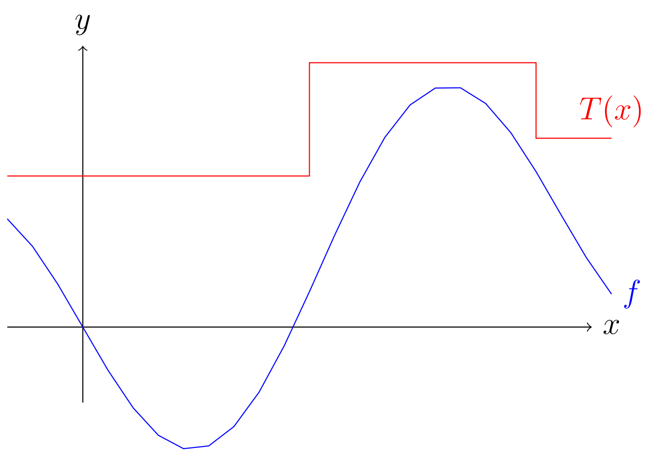
1.7 Definition des Integrals einer Treppenfunktion

Sei $f = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{Q_k}$ eine Treppenfunktion. Dann ist

$$\int f(x)dx := \sum_{k=1}^{m} c_k \cdot \mathrm{Vol}(Q_k). \tag{1.6}$$

1.8 Bemerkung zu Integralen von Treppenfunktionen

In der Situation von Definition 1.7 ist $f \to \int f(x)dx$ eine lineare Abbildung vom Vektorraum $T(\mathbb{R}^n)$ der Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$.



$$T(x) \geq |f(x)| \,\forall\, x \tag{1.7}$$

$$\int |T(x)|dx = \|T\|_\infty \leq \|f\|_\infty \tag{1.8}$$

1.9 Notation

1.9.1 Definition der reellen Zahlen mit Unendlich

Definiere $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ als Menge. Eine Folge a_k in $\mathbb{R}$ *konvergiert in* $\overline{\mathbb{R}}$ genau dann, wenn a_k gegen konvergiert $c \in \mathbb{R}$ oder uneigentlich gegen $\pm\infty$ konvergiert.

1.9.2 Bemerkung über Reihen

Jede Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0 \,\forall\, k$ konvergiert in $\overline{\mathbb{R}}$.

$$s_m = \sum_{k=1}^{m} a_k \text{ ist monoton steigend } \Rightarrow s_m \text{ ist konvergent oder unbeschränkt} \tag{1.9}$$

$$\Rightarrow s_m \text{ konvergiert in } \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \tag{1.10}$$

1.9.3 Definition über das Rechnen mit Unendlich

$$(+\infty) + c = +\infty \quad \forall c \in \mathbb{R} \tag{1.11}$$

$$(-\infty) + c = -\infty \quad \forall c \in \mathbb{R} \tag{1.12}$$

$$(+\infty) + (-\infty) \text{ ist undefiniert} \tag{1.13}$$

1.10 Definition von Hüllreihen

Sei $f\colon\ \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$. Eine Hüllreihe für f ist eine Reihe der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{Q_k} \tag{1.14}$$

mit:

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n\colon\ \sum_{k=1}^{\infty} |c_k \chi_{Q_k}| \geq |f(x)|$
2. $c_k \geq 0, c_k \in \mathbb{R}$
3. Q_k sind offene, beschränkte Quader

1.11 Definition des Inhalts einer Hüllreihe

Der *Inhalt einer Hüllreihe* ist

$$\mathrm{In} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \mathrm{Vol}(Q_k) \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}. \tag{1.15}$$

1.12 Definition der Hüllreihe einer Funktion

$$\|f\|_1 = \inf\{\mathrm{In}(\varphi)\colon \varphi \text{ ist Hüllreihe für } f\} \tag{1.16}$$

1.13 Beispiele für Hüllreihen

1. $f(x) = 2$: Sei

$$Q_k = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon |x_i| \leq k \,\forall\, i\} \tag{1.17}$$

Dann ist

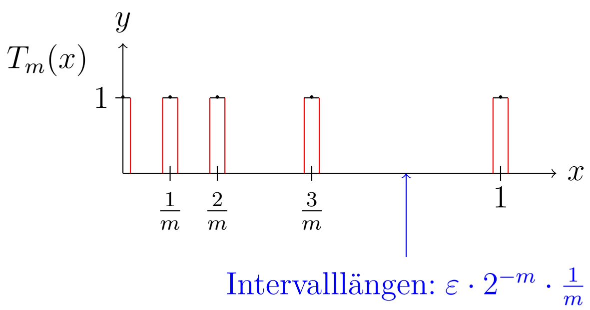
$$\sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \chi_{Q_k} \tag{1.18}$$

eine Hüllreihe für f.

$$\text{In} = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \text{Vol}(Q_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2(2k)^n = +\infty. \tag{1.19}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \chi_{Q_k} = +\infty \geq f(x) \tag{1.20}$$

2. $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$: Fixiere $\varepsilon > 0$.



$$\int T_m(x)dx = \varepsilon \cdot 2^{-m} \tag{1.21}$$

Dann ist:

$$T_m(x) = \sum_{l=0}^{m} \chi_{Q_{m,l}} \tag{1.22}$$

mit

$$\left]\frac{l}{m} - \rho, \frac{l}{m} + \rho\right[\cap [0,1[\tag{1.23}$$

$$\rho = \varepsilon \cdot 2^{-m} \cdot \frac{1}{m} \tag{1.24}$$

eine Treppenfunktion und:

$$\sum_{m}^{\infty} T_m = \sum_{m,l}^{\infty} \chi_{Q_{m,l}} \tag{1.25}$$

die Hüllreihe nach Umnummerierung. Sei

$$x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]. \tag{1.26}$$

Dann gilt:

$$x = \frac{p}{m}, p \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \text{ mit } x \in [0,1] \tag{1.27}$$

$$\Rightarrow 0 \leq p \leq m \;\Rightarrow x \in Q_{m,p} \;\Rightarrow f(x) = 1 = \chi_{Q_{m,p}} \leq \sum_{m,l}^{\infty} \chi_{Q_{m,l}} \tag{1.28}$$

$$(x \notin Q \Rightarrow f(x) = 0 \leq \sum_{m,l}^{\infty} \chi_{Q_{m,l}}) \tag{1.29}$$

Das heißt:

$$\sum_{m,l}^{\infty} \chi_{Q_{m,l}} \tag{1.30}$$

ist eine Hüllreihe für

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} \tag{1.31}$$

$$\begin{gathered} \mathrm{In}\left(\sum_{m}^{\infty} \chi_{Q_{m,l}}\right) = \sum_{m,l}^{\infty} \mathrm{Vol}(Q_{m,l}) \\ = \sum_{m}^{\infty} m \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{m} \cdot 2^{-m} = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon \cdot 2^{-m} = \varepsilon \end{gathered} \tag{1.32}$$

Also existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine Hüllreihe φ für f mit

$$Inhalt(\varphi) < \varepsilon \;\Rightarrow \|f\|_1 = 0. \tag{1.33}$$

1.14 Lemma über die elementaren Eigenschaften der L^1-Halbnorm $\|\cdot\|_1$

1. $\|f\|_1 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \{+\infty\}$
2. $\|g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

Beweis Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{Q_k}$ Hüllreihe für f und $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k \chi_{Q_k}$ Hüllreihe für g, dann ist $(\sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{Q_k}) + (\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k \chi_{Q_k})$ Hüllreihe für $f + g$.
Genauer:

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \chi_{M_k} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} d_{2k+1} &= c_k \quad M_{2k+1} = Q_k \\ d_{2k} &= \tilde{c}_k \quad M_{2k} \quad = \tilde{Q}_k \end{aligned} \tag{1.34}$$

3. $\|f\|_1 \cdot |\lambda| = \|\lambda f\|_1 \,\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$
4. $\|f\|_1 = \|g\|_1$ falls $|f(x)| = |g(x)| \,\forall\, x$
5. $\|f\|_1 \leq \|g\|_1$ falls $|f(x)| \leq |g(x)| \,\forall\, x$

Beweis $|f(x)| \leq |g(x)| \,\forall\, x \Rightarrow$ Jede Hüllreihe für g ist auch eine Hüllreihe für f ("Monotonie").

1.15 Bemerkung, warum die L^1-Halbnorm keine Norm ist

Die L^1-Halbnorm ist *keine Norm*, weil:

1. $\|f\|_1 = \infty$ möglich ist und
2. $\|f\|_1 = 0 \not\Rightarrow f = 0$.

Ziele

- Wenn $T(x)$ Treppenfunktion ist, dann soll $\underline{\int |T(x)| dx = \|T\|_1}$ gelten.
- Was ist ein Integral? Wenn $T_n(x)$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\lim \|T_n - f\|_1 = 0$ ist, dann sei $\int f(x)dx := \lim \int T_n(x)dx$.

1.16 Satz über die Berechenbarkeit des Volumens eines Quaders

Sei Q ein kompakter Quader, $Q \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\text{Vol}(Q) = \int \chi_Q(x)dx = \|\chi_Q\|_1 \tag{1.35}$$

Beweis $\underline{\Rightarrow}$: Wir zeigen:

$$\|\chi_Q\|_1 \leq \int \chi_Q(x)dx = \mathrm{Vol}(Q) \tag{1.36}$$

$$Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \tag{1.37}$$

Erinnerung: Es gilt:

$$\|f\|_1 = \inf\{\mathrm{In}(\varphi)\colon \varphi \text{ ist Hüllreihe für } f\}. \tag{1.38}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$]a_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon[\times \cdots \times]a_n - \varepsilon, b_n + \varepsilon[\tag{1.39}$$

ist ein offener Quader $\tilde{Q}$ mit

$$Q \subset \tilde{Q} \Rightarrow \chi_{\tilde{Q}} \geq \chi_Q \tag{1.40}$$

$\Rightarrow \chi_{\tilde{Q}}$ ist eine Hüllreihe der Form:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{Q_k} \text{ mit } a_1 = 1, Q_1 = \tilde{Q}, a_k = 0 \,\forall\, k > 0 \tag{1.41}$$

$$\mathrm{Vol}(\tilde{Q}) = (b_1 - a_1 + 2\varepsilon) \cdots (b_n - a_n + 2\varepsilon) = \mathrm{In}(\chi_{\tilde{Q}}) \tag{1.42}$$

Es gilt:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{Vol}(\tilde{Q}) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) = \mathrm{Vol}(Q) \tag{1.43}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Vol}(Q) \geq \inf\{\mathrm{In}(\varphi)\colon \varphi \text{ ist Hüllreihe für } f\} \tag{1.44}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Vol}(Q) = \int |\chi_Q(x)|dx \geq \|\chi_Q\|_1 \tag{1.45}$$

($\Leftarrow$) Noch zu zeigen:

$$\|\chi_Q\|_1 \geq \int |\chi_Q(x)|dx = \mathrm{Vol}(Q) \tag{1.46}$$

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{Q_k}$ eine Hüllreihe für χ_Q. Fixiere $\varepsilon > 0$. Aus der Definition von Hüllreihen gilt:

$$\forall x\colon \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{Q_k}(x) \geq \chi_Q(x) \tag{1.47}$$

$$\forall x \in Q\colon \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{Q_k}(x) \geq 1 \tag{1.48}$$

$$\Rightarrow \forall x \in Q\colon \exists N(x)\colon \sum_{k=1}^{N}(x) a_k \chi_{Q_k}(x) > 1 - \varepsilon \tag{1.49}$$

Für $x \in Q$ definieren wir

$$\bigcap_{\substack{x \in Q_k \\ k \leq N(x)}} Q_k = W_x. \tag{1.50}$$

Dann gilt $x \in W_x$ und W_x offen, da die Q_k offen sind. Für alle $p \in W_x$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{N}(x)\chi_{Q_k}(p) \underset{\uparrow}{\geq} \sum_{k=1}^{N}(x)\chi_{Q_k}(x) > 1 - \varepsilon \tag{1.51}$$

$$\text{weil für } k \leq N(x)\colon x \in Q_k \Rightarrow p \in Q_k \tag{1.52}$$

Erinnerung: Jede offene Überdeckung von kompakten Mengen besitzt eine endliche Teilüberdeckung.
Also: $\cup_{x \in Q}(W_x)_{x \in Q}$ ist eine Familie von offenen Mengen mit

$$\bigcup_{x \in Q} W_x \supset Q \Rightarrow \exists x_1, \ldots, x_s\colon W_{x_1} \cup \ldots \cup W_{x_s} \supset Q \tag{1.53}$$

Nun gilt:

$$\forall p \in W_x\colon \sum_{k=1}^{N}(x) a_k\colon \chi_{Q_k}(p) > 1 - \varepsilon \tag{1.54}$$

Sei $N = \max\{N(x_1), \ldots, N(x_s)\}$. Dann gilt:

$$\forall p \in Q\colon \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{Q_k}(p) > 1 - \varepsilon \text{ (Treppenfunktion)} \tag{1.55}$$

$$\left\{\sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{Q_k}(p)\right\} - (1-\varepsilon)\chi_Q(p) = T(p) \text{ mit } T(p) \geq 0 \,\forall\, p \tag{1.56}$$

Hilfsbehauptung Wenn T Treppenfunktion mit $T(x) \geq 0 \,\forall\, x$ ist, dann folgt

$$\int T(x)dx \geq 0 \tag{1.57}$$

Beweis der Hilfsbehauptung

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N} a_k \mathrm{Vol}(Q_k) \geq (1-\varepsilon)\mathrm{Vol}(Q) \tag{1.58}$$

HB

<u>Also:</u> Für jede Hüllreihe und $\forall\varepsilon$

$$\mathrm{In}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\chi_{Q_k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathrm{Vol}(Q_k) \geq \sum_{k=1}^{N} a_k \mathrm{Vol}(Q_k) \geq (1-\varepsilon)\mathrm{Vol}(Q) \tag{1.59}$$

$$\Rightarrow \mathrm{In}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\chi_{Q_k}\right) \geq \mathrm{Vol}(Q) \tag{1.60}$$

$$\Rightarrow \|\chi_Q\|_1 = \inf\left\{\mathrm{In}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\chi_{Q_k}\right)\right\} \geq \mathrm{Vol}(Q) \tag{1.61}$$

$$\Leftrightarrow \|\chi_Q\|_1 = \mathrm{Vol}(Q) = \int \chi_(Q)(x)dx \tag{1.62}$$

1.17 Lemma über die Positivität des Integrals von Treppenfunktionen

Sei T eine Treppenfunktion mit $T(x) \geq 0 \,\forall\, x$. Dann gilt: $\int T(x)dx \geq 0$.

Beweis Da

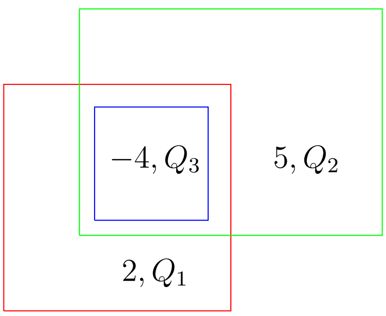
$$\int T(x)dx = \sum_{k=1}^{m} a_k \mathrm{Vol}(Q_k) \tag{1.63}$$

falls

$$T = \sum_{k=1}^{m} a_k\chi_{Q_k} \tag{1.64}$$

genügt es zu zeigen, dass man $T = \sum_{k=1}^{m} a_k\chi_{Q_k}$ schreiben kann mit $a_k \geq 0 \,\forall\, k$.

Problem



$$T = 2\chi_{Q_1} + 5\chi_{Q_1} - 4\chi_{Q_1} \tag{1.65}$$

Hilfslemma Jede Treppenfunktion T läßt sich schreiben in der Form $T(x) = \sum_{l=1}^{M} b_l \chi_{C_l}$, wobei die C_l *disjunkte* Quader sind.

Beweis des Hilfslemmas: Seien $T = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{Q_k}$ und S die Menge aller Koordinaten aller Quader Q_k. $S \subset \mathbb{R}$ endliche Teilmenge, $S = \{S_1, \dots, S_r\}$ mit $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_r$. Als $\{Q_l\}_l$ wählen wir die Menge aller $I_1 \times \dots \times I_n$, wobei jedes I_j der Form $\{S_j\}$ oder $]S_j, S_{j+1}[$. Dann ist jeder Quader Q_k Vereinigung von einigen der Quadern C_l

$$\Rightarrow T(x) = \sum_{l=1}^{p} b_l \chi_{C_l} \quad \exists b_l \in \mathbb{R} \tag{1.66}$$

Forsetzung des Lemmabeweises: Wegen des Hilfslemmas gilt $T(x) \sum_{l=1}^{p} b_l \chi_{C_l}$ mit C_l paarweise *disjunkt*. Daraus folgt:

$$T(x) \geq= 0 \,\forall\, x \Rightarrow b_l \geq 0 \,\forall\, l \tag{1.67}$$

$$\Rightarrow b_l \geq= 0, \mathrm{Vol}(C_l) \geq 0 \,\forall\, l \tag{1.68}$$

$$\Rightarrow \int T(x)dx = \sum_{l=1}^{p} b_l \mathrm{Vol}(C_l) \geq 0 \,\forall\, l \tag{1.69}$$

1.18 Satz über die Gleichheit der L^1-Halbnorm und dem Integral des Betrages einer Funktion

Sei f eine Treppenfunktion. Dann gilt $\|f\|_1 = \int |f(x)|dx$.

Bemerkung $\|f\|_1$ und $\int |f(x)|dx$ hängen nur von $|f(x)|$ ab und $x \to |f(x)|$ ist ebenfalls eine Treppenfunktion. Deshalb setzen wir o.B.d.A. $f(x) \geq 0 \,\forall\, x$.

Beweis

1. Bereits bekannt für χ_Q (Q Quader)
2. $f(x) = \sum_{l=1}^{M} a_k \chi_{Q_k}$. Nach 1.17 gilt:

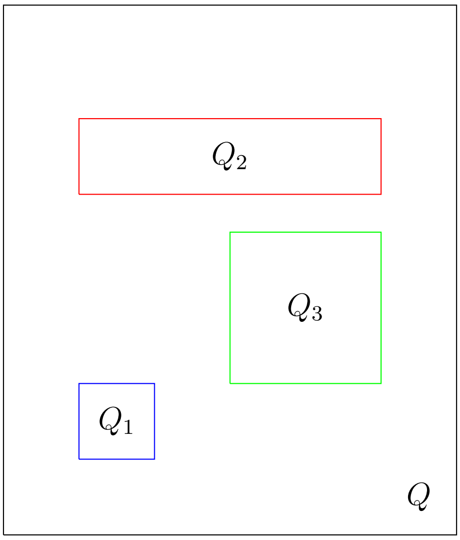
$$f(x) \geq 0 \xRightarrow{\text{o.B.d.A.}} c_k \geq 0 \,\forall\, k \tag{1.70}$$

$$\Rightarrow \int |f(x)|dx = \sum_{k=1}^{M} a_k \mathrm{Vol}(Q_k) = \sum_{k=1}^{N} \|a_k \chi_{Q_k}\|_1 \tag{1.71}$$

Nach der Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_1$ folgt weiter:

$$\int |f(x)|dx = \sum_{k=1}^{N} \|a_k \chi_{Q_k}\|_1 \geq \|\sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{Q_k}\|_1 = \|f\|_1 \tag{1.72}$$

<u>Also:</u> Für jede Treppenfunktion f mit $f(x) \geq 0 \,\forall\, x$ gilt: $\int f(x)dx \geq \|f\|_1$.



Wähle einen kompakten Quader Q so, dass $Q_k \subset Q \forall k$. Wähle M so, dass $M \geq \sum_{k=1}^{N} a_k$. Dann gilt:

$$M\chi_Q(x) \geq f(x) \tag{1.73}$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = M\chi_Q(x) - f(x) \tag{1.74}$$

ist eine Treppenfunktion mit $g(x) \geq 0 \,\forall\, x$.

$$\Rightarrow \int g(x)dx \geq \|g\|_1 \tag{1.75}$$

$$\Rightarrow \int f(x) + g(x) \geq \|f\|_1 + \ \|g\|_1 \tag{1.76}$$

<u>Aber:</u>

$$\underline{\|M\chi_Q\|_1} = M\|\chi_Q\|_1 \tag{1.77}$$

$$= \int M\chi_Q(x)dx \overset{\text{weil } g(x)=M\chi_Q - f}{=\!=\!=\!=\!=} \int f(x) + g(x)dx \tag{1.78}$$

$$\geq \|f\|_1 + \|g\|_1 \geq \|g\|_1 = \underline{\|M\chi_Q\|_1} \tag{1.79}$$

$$\Rightarrow \text{Nur Gleichungen} \tag{1.80}$$

$$\Rightarrow \int f(x) + g(x)dx = \|f\|_1 + \|g\|_1 \tag{1.81}$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \|f\|_1 \tag{1.82}$$

1.18.1 Beispiel

Sei $c \neq 0$ und $f(x)$=c (konstant). Dann gilt $\|f\|_1 = +\infty$

Beweis Sei $Q_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon |x_i| \leq m\}$ Quader. Es gilt:

$$\begin{aligned} &|f(x)| = |c| \geq |c|\chi_{Q_m} \, \forall \, m && (1.83)\\ \Rightarrow &\|f\|_1 \geq \|c\chi_{Q_m}\|_1 \, \forall \, m && (1.84)\\ = &\int |c|\chi_{Q_m}(x)dx = |c|(2m)^n \, \forall \, m && (1.85)\\ \Rightarrow &\|f\|_1 = +\infty && (1.86) \end{aligned}$$

1.18.2 Folgerung

Sei f eine Treppenfunktion. Dann gilt $|\int f(x)dx| \leq \|f\|_1$.

Beweis

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \tag{1.87}$$

wobei

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\} \; f^-(x) = \max\{0, -f(x)\} \tag{1.88}$$

Also:

$$|\int f(x)dx| = |\int f^+(x) - f^-(x)dx| \leq \int f^+(x)dx + \int f^-dx = \int |f(x)|dx \tag{1.89}$$

1.19 Ungleichungssatz für die L^1-Halbnorm

Seien $(f_k)_{k\geq 1} f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ Funktionen mit $|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \, \forall \, x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\|f\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1 \tag{1.90}$$

Beweis Fall 1:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1 = +\infty \Rightarrow \tag{1.91}$$

Also gilt die Behauptung.
Fall 2:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1 < +\infty \Rightarrow \; \forall \, \varepsilon > 0 \text{ gilt } \|f\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1 + \varepsilon \tag{1.92}$$

Sei $\varepsilon \geq 0$ gegeben. Nach Definition der L^1-Halbnorm existiert $\forall k \in \mathbb{N}$ eine Hüllreihe für f_k

$$\sum_{l=1}^{\infty} T_k, l \tag{1.93}$$

mit

$$\sum_{l=1}^{\infty} \int T_{k,l}(x)dx = \sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{In}(T_{k,l}) \leq \|f_k\|_1 + 2^{-k}\varepsilon \tag{1.94}$$

Wir setzten

$$S_m := \sum_{k,l=1}^{m} T_{k,l} \text{ wobei } m = \max(k,l) \tag{1.95}$$

$$f_k = \sum_{l=1}^{\infty} T_{k,l}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} T_{k,l} \right) \tag{1.96}$$

$$\lim_{m \to \infty} \left(\sum_{m=1}^{M} T_{k,l} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} S_m \tag{1.97}$$

als endliche Summe von Treppenfunktionen und daher auch Treppenfunktion mit positiven Koeffizienten. Dann ist

$$\varphi := \sum_{m=1}^{\infty} S_m \text{ Hüllreihe von } \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \quad \text{(Übung)} \tag{1.98}$$

Dann ist φ auch Hüllreihe für f, da

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \, \forall \, x. \tag{1.99}$$

Es folgt:

$$|f| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \leq \sum_{m}^{n} S_m = \varphi \tag{1.100}$$

und somit

$$\begin{aligned} \|f\|_1 \leq \|\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|\|_1 \leq \mathrm{In}(\varphi) \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \int S_m(x)dx = \lim_{m \to \infty} \sum_{1 \leq k \leq m} \left(\sum_{1 \leq l \leq m} \int T_{k,l}(x)dx \right) \end{aligned} \tag{1.101}$$

Aus

$$\sum_{1 \leq l \leq m} \int T_{k,l}(x)dx \leq \|f_k\|_1 + 2^{-k}\varepsilon \tag{1.102}$$

folgt

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k\le m} \left(\sum_{l\le m} \int T_{k,l}(x)dx \right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\varepsilon \right) \tag{1.103}$$

$$\|f\|_1 \le \|\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|\|_1 \le \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1 + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{1.104}$$

2 Nullmengen

2.1 Definition von (Lebesgue-)Nullmengen

Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt "(Lebesgue-)Nullmenge" falls $\|\chi_N\|_1 = 0$.

2.2 Satz über Teilmengen von Nullmengen

Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.

Beweis Seien N eine Nullmenge und $A \subset C$. Dann gilt

$$0 \le \chi_A \le \chi_N \tag{2.1}$$

und

$$0 = \|0\|_1 \le \|\chi_1\|_1 \le \|\chi_N\|_1 = 0 \tag{2.2}$$

2.3 Nullmengensatz für halbnormierte Funktionen

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann gilt

$$\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \neq 0\} \text{ ist Nullmenge.} \tag{2.3}$$

Beweis O.B.d.A.: $f \ge 0$. Sei $A := \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \neq 0\}$
($\Rightarrow$) Es gilt:

$$\|nf\|_1 = 0 \quad \forall n \le 1. \tag{2.4}$$

Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} nf(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin A \\ +\infty & , x \in A \end{cases} \tag{2.5}$$

gilt

$$\chi_A \leq \sum_{n=1}^{\infty} nf \tag{2.6}$$

und somit

$$0 \leq \|\chi_1\|_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|nf\|_1 = 0 \tag{2.7}$$

das heißt A ist Nullmenge.
($\Leftarrow$) Es gilt:

$$f \leq \sum_{n=1}^{\infty} n\chi_A \tag{2.8}$$

und daher:

$$0 \leq \|f\|_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|n\chi_A\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (n\|\chi_A\|_1) = 0 \Rightarrow \|f\|_1 = 0 \tag{2.9}$$

2.4 Satz über die Vereinigung von Nullmengen

Die Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen ist eine Nullmenge.

Beweis Es seien $(N_k)_k \geq 1$ Nullmengen, dann gilt:

$$\chi_{\bigcup N_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{N_k} \tag{2.10}$$

Daher folgt:

$$0 \leq \|\chi_{\bigcup N_k}\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|\chi_{N_k}\|_1 = 0 \tag{2.11}$$

das heißt $\bigcup N_k$ ist Nullmenge.

2.4.1 Folgerung

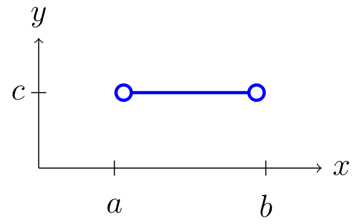
Jede abzählbare Menge in $\mathbb{R}^n$ ist Nullmenge. Insbesondere ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ Nullmenge.

2.4.2 Beispiele von nicht abzählbaren Nullmengen

1.

$$I = [a, b], a < b, c \in R \tag{2.12}$$

$$A := I \times \{c\} \subset \mathbb{R}^2 \tag{2.13}$$



Dann ist A Nullmenge.

2. Beispiel einer überabzählbaren Nullmenge in $\mathbb{R}$:

Cantor-Menge Dezimalentwicklung für $x \in [0, 1]$:

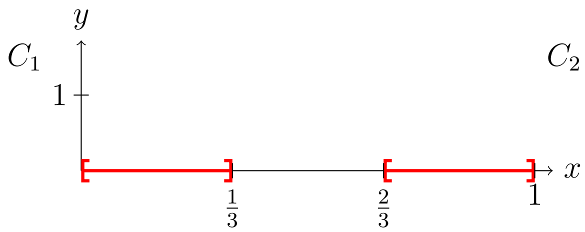
$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k 10^{-k} \text{ mit } \alpha_k \in \{0, 1, \ldots, 9\} \tag{2.14}$$

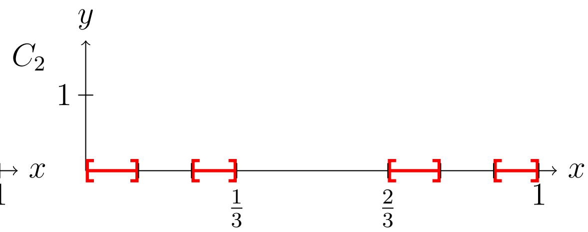
Entwicklung zur Basis 3 (3-adisch):

$$[0, 1] \ni x = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k 10^{-k} \text{ mit } \gamma_k \in \{0, 1, 2\} \tag{2.15}$$

<u>Idee von Cantor:</u>

$$C_l := \{x \in [0, 1] | \gamma_k \neq 1\} \text{ mit } 1 \leq k \leq l \tag{2.16}$$





$C_l \supset C_l + 1$ für $l \geq 1$. Cantor-Menge C ist:

$$C := \{x \in [0, 1] | \, \forall \, k \geq 1, \gamma_k \neq 1\} \tag{2.17}$$

Eigenschaften:

a) C ist Lebesgue-Nullmenge.

b) C ist überabzählbar.

<u>Zu a)</u>

$$C \subset C_l \, \forall \, l \geq 1 \Rightarrow o \leq \|\chi_C\|_1 \leq \|\chi_{C_l}\|_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^l \tag{2.18}$$

Daher gilt

$$\|\chi_C\|_1 = 0 \tag{2.19}$$

Zu b) $P(\mathbb{N})$ ist überabzählbar, $P(\mathbb{N}) \to C$

$$x = \sum_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k 3^{-k} \Rightarrow A \mapsto \chi_A = \sum_{k\in A} 2 \cdot 3^{-k} \tag{2.20}$$

mit $\gamma_k = \{0, 2\}$. Injektion von $P(\mathbb{N})$ in C. Es folgt, dass C überabzählbar ist.

3 Das Lebesgue-Integral

3.1 Definition des Lebesgue-Integrals einer Funktion

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ Funktion. Dann heißt f *Lebesgue-integrierbar*, falls es eine Folge von Treppenfunktionen $(T_k)_{k\geq 1}$ gibt, sodass $\|f - T_k\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Wir nennen die Zahl

$$I = \lim_{k\to\infty} \int T_k(x)dx \tag{3.1}$$

das "Lebesgue-Integral" von f und schreiben:

$$\int f(x)dx \coloneqq I \tag{3.2}$$

1. Prüfen: Ist I wohldefiniert? Das heißt falls (T_k') eine weitere Folge von Treppenfunktionen mit $\|f - T_k'\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} = 0$, gilt dann auch dass
$$\lim_{k\to\infty} \int T_n' dx = I \ ? \tag{3.3}$$
2. Auch Prüfen: Ist $(\int T_k(x)dx)_{k\geq 0}$ konvergent?

Beweis Zu 2. :

$$\|T_k - T_l\|_1 = \|T_k - f + f - T_l\|_1 \leq \|T_k - f\|_1 + \|f - T_l\|_1 \xrightarrow[k,l\to\infty]{} 0 \tag{3.4}$$

Es folgt:

$$|\int T_k(x)dx - \int T_l(x)dx| \leq \int |T_k - T_l|dx = \|T_k - T_l\|_1 \xrightarrow[k,l\to\infty]{} 0 \tag{3.5}$$

das heißt $(\int T_k(x)dx)_{k\geq 1}$ ist Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und somit konvergent gegen eine Zahl, die wir I nennen.
Zu 1. : Z.z.: $\lim_{k\to\infty} \int T_k'(x)dx = I$

$$\begin{aligned} |\int T_k(x)dx - \int T_k'(x)dx| &= |\int (T_k - T_k')dx| \\ &\leq \|T_k - T_k'\|_1 = \|T_k - f\|_1 + \|f - T_k'\|_1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$\boxtimes$

3.2 Ungleichungssatz für das Lebesgue-Integral

Für jede integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt

$$|\int f(x)dx| \leq \int |f(x)|dx = \|f\|_1 \tag{3.7}$$

Beweis Zuerst :"="-Zeichen:
Mittels Dreiecksungleichung erhalten wir:

$$|f| - |T_k| = |f - T_k + T_k| - |T_k| \leq |f - T_k| + |T_k| - |T_k| = |f - T_k| \tag{3.8}$$

und

$$|T_k| - |f| = |T_k - f| + |f| - |f| \leq |T_k - f| + |f| - |f| = |T_k - f| \tag{3.9}$$

das heißt

$$\Big||f| - |T_k|\Big| \leq |f - T_k| \tag{3.10}$$

Sei also $(T_k)_{k\geq 1}$ Treppenfunktionsfolge mit

$$\|f - T_k\|_1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \tag{3.11}$$

Hilfsbehauptung $|(T_k)_{k\geq 1}|$ ist Treppenfunktionsfolge mit

$$\Big\||f| - |T_k|\Big\|_1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \tag{3.12}$$

Wir haben:

$$\Big\||f| - |T_k|\Big\|_1 \leq \|f - T_k\|_1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \tag{3.13}$$

da jede Hüllreihe von $f - T_k$ eine Hüllreihe von $|f| - |T_k|$ ist.

Es folgt, dass $|f|$ integrierbar ist und es gilt:

$$\int |f(x)|dx = \lim_{k\to\infty} \int |T_k(x)|dx = \lim_{k\to\infty} \|T_k\|_1 \tag{3.14}$$

Weiterhin gilt:

$$\|f\|_1 = \|f - T_k + T_k\|_1 \leq \|f - T_k\|_1 + \|T_k\|_1 \to \int |f(x)|dx \tag{3.15}$$

und

$$\begin{aligned}\|T_k\|_1 - \|f - T_k\|_1 &= \|f + (T_k - f)\|_1 - \|f - T_k\|_1 \\ &\leq \|f\|_1 + \|T_k - f\|_1 - \|f - T_k\|_1 = \|f\|_1\end{aligned} \tag{3.16}$$

Schließlich gilt:

$$\lim \|T_k\|_1 \leq \|f\|_1 \leq \lim \|T_k\|_1 \tag{3.17}$$

und somit

$$\int |f(x)| dx = \lim \|T_k\|_1 = \|f\|_1 \tag{3.18}$$

<u>Jetzt:</u> "$\leq$" beweisen.
Für $\varepsilon > 0 \; \exists k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f - T_k\|_1 < \varepsilon \tag{3.19}$$

und

$$|\int f(x)dx - \int T_k(x)dx| < \varepsilon \; \forall \; k \geq k_0 \tag{3.20}$$

Sei $T := T_{k_0}$. Es gilt:

$$|\int T(x)dx| \leq \|T\|_1 \tag{3.21}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
|\int f(x)dx| &= |\int f(x)dx - \int T(x)dx + \int T(x)dx| && (3.22)\\
&\leq |\int f(x)dx - \int T(x)dx| + |\int T(x)dx| && (3.23)\\
&\leq \varepsilon + \int |T(x)| dx = \varepsilon + \|T\|_1 && (3.24)\\
&= \varepsilon + \|T - f + f\|_1 && (3.25)\\
&\leq \varepsilon \|T - f\|_1 + \|f\|_1 && (3.26)\\
&\leq \|f\|_1 + 2\varepsilon && (3.27)
\end{aligned}$$

D.h $\forall \varepsilon > 0$ gilt:

$$|\int f(x)dx| \leq \|f\|_1 + 2\varepsilon \tag{3.28}$$

Dann folgt:

$$|\int f(x)dx||\int f(x)dx| \leq \int |f(x)| dx \tag{3.29}$$

3.3 Integrationsapproximationssatz

Es seien $(f_k)_{k \geq 1} f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ Funktionen. Wenn alle f_k integrierbar sind und $\|f - f_k\|_1 \to 0$, dann ist auch f integrierbar und es gilt:

$$\int f(x)dx = \lim_{k \to \infty} \int f_k(x)dx \tag{3.30}$$

Beweis Da f_k integrierbar ist, gibt es eine Treppenfunktion T_k mit $k_1 = k_1(\frac{\varepsilon}{2})$ sodass

$$\|f_k - T_k\|_1 \leq 2^{-k} \tag{3.31}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $k_1 \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall k \geq k_1$ gilt

$$\|f - f_k\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.32}$$

Es gibt ein $k_2 \in \mathbb{N}$ mit $\forall k \geq k_2$ gilt

$$2^{-k} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.33}$$

Schließlich gilt $\forall k \geq k_0 := \max(k_1, k_2)$:

$$\begin{aligned} \|f - T_k\|_1 &= \|f - f_k + f_k - T_k\|_1 \\ &\leq \|f - f - k\|_1 + \|f_k - T_k\|_1 < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + 2^{-k} < \varepsilon \end{aligned} \tag{3.34}$$

Somit ist f integrierbar. Weiterhin gilt:

$$|\int f_k(x)dx - \int f(x)dx| = |\int (f_k - f)(x)dx| \leq \|f_k - f\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{3.35}$$

Das heißt

$$\int f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int f_k(x)dx \tag{3.36}$$

3.4 Propostion

Es seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

1. $H := af + bg$ ist integrierbar und $\int H(x)dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$ (Linearität des Integrals)
2. $|f|, |g|$ ist integriebar
3. $m := \max(f, g)$ integrierbar
4. $$f(x) \leq g(x)\,\forall\, x \Rightarrow \int f(x)dx \geq \int g(x)dx \tag{3.37}$$
5. $$f(x) \leq 0\,\forall\, x \Rightarrow \int f(x)dx \geq 0 \tag{3.38}$$

Die Eigenschaften 4. und 5. werden auch als ”Monotonie des Integrals” bezeichnet.

Beweis

1. Es seien $(T_k)_{k\geq 1}$ und $(S_k)_{k\geq 1}$ Folgen von Treppenfunktionen, sodass

$$\|f - T_k\|_1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \quad \|g - S_k\|_1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \tag{3.39}$$

Wir setzen

$$R_k \coloneqq a \cdot T_k + b \cdot S_n \tag{3.40}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\|H - R_k\|_1 = \|af + bg - a \cdot T_k - b \cdot S_k\|_1 \\ \leq |a|\|f - T_k\|_1 + |b|\|f - S_k\|_1 \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0\end{aligned} \tag{3.41}$$

Das heißt H integrierbar mit:

$$\int H(x)dx = \lim_{k\to+\infty} \int R_k(x)dx = \lim_{k\to+\infty} (\int (aT_k + bS_k)dx) \tag{3.42}$$

$$= a \cdot \lim_{k\to+\infty} \int T_k dx + b \cdot \lim_{k\to+\infty} \int S_k dx \tag{3.43}$$

$$= a \cdot \int f(x)dx + b \cdot \int g(x)dx \tag{3.44}$$

2. Schon bewiesen.

3.

$$\max(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + |\alpha - \beta|) \tag{3.45}$$

$$m(x) = \max(f, g) = \frac{1}{2} \tag{3.46}$$

ist integrierbar.

4.

$$(f - g)(x) \geq 0 \,\forall\, x \tag{3.47}$$

$$\Rightarrow \int (f - g)(x)dx = \int |(f - g)(x)|dx = \|f - g\|_1 \geq 0 \tag{3.48}$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx \geq \int g(x)dx \tag{3.49}$$

5. Folgt aus 4. mit $g = 0$

3.5 Satz von Beppo Levi

Sei T_k eine Treppenfunktionenfolge mit

$$T_{k+1}(x) \geq T_k(x) \,\forall\, n \,\forall\, x \tag{3.50}$$

Sei

$$\lim_{k \to +\infty} T_k(x) := f(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \subset \overline{\mathbb{R}} \tag{3.51}$$

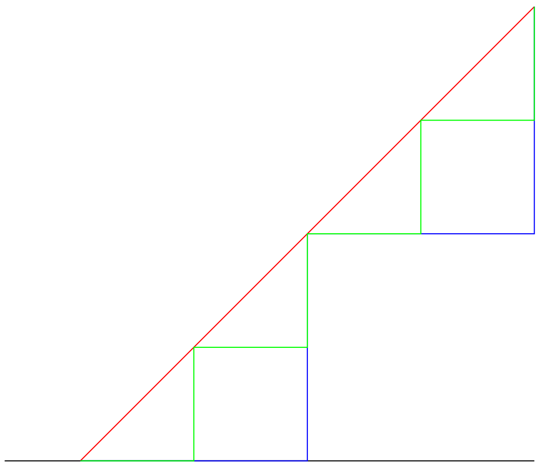
Wenn $\exists c > 0$ mit

$$\int T_k(x)dx \leq c, \tag{3.52}$$

dann ist f integriebar mit

$$\lim_{k \to +\infty} \int T_k(x)dx = \int f(x)dx \tag{3.53}$$

3.5.1 Beispiel



Sei

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ für } 0 \leq x < 1 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \tag{3.54}$$

$$T_0(x) = 0, \quad T_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ für } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \tag{3.55}$$

$T_k(x)$: Schrittlänge $\frac{1}{2^k}$ mit

$$T_k(x) = \begin{cases} l \cdot \frac{1}{2^k} \text{ für } \frac{l}{2^k} \leq x < \frac{l+1}{2^k} \\ 0 \text{ falls } x \leq 0 \text{ oder } x \geq 1 \end{cases} \tag{3.56}$$

mit $0 \leq l \leq 2^k - 1$.
Klar:

$$T_{k+1} \geq T_k \,\forall\, x \text{ und } \lim_{k\to+\infty} T_k = f \tag{3.57}$$

$$\int T_k(x)dx = \sum_{l=0}^{2^k-1} \frac{l}{2^k}\frac{1}{2^k} = \sum_{l=0}^{2^k-1} \frac{l}{4^k} = \frac{l}{4^k}\frac{(2^k-1)\cdot 2^k}{2} \tag{3.58}$$

$$= \frac{4^k - 2^k}{4^k \cdot 2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 2^k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{1}{2} \tag{3.59}$$

$$\exists c (c = \frac{1}{2})\colon c \geq \int T_k(x)dx \,\forall\, k \tag{3.60}$$

$$\xRightarrow{\text{Beppo Levi}}\colon f(x) \text{ ist Lebesgue-integrierbar mit } \int f(x)dx = \frac{1}{2} \tag{3.61}$$

Beweis des Satzes: Wir definieren:

$$g_k(x) \coloneqq T_{k+1}(x) - T_k(x) \tag{3.62}$$

Wegen

$$T_{k+1} \geq T_k \text{ gilt } g_k(x) \geq 0 \,\forall\, x \tag{3.63}$$

Betrachte $f - T_N$ für $N \in \mathbb{N}$. Weil

$$f = \lim_{k\to+\infty} T_k \;\text{ und }\; g_k(x) = T_{k+1} - T_k \tag{3.64}$$

gilt

$$f - T_N = \sum_{k\geq N} g_k \tag{3.65}$$

$$\|f - T_N\|_1 = \| \sum_{k\geq N} \|_1 \leq \sum_{k\geq N} \|g_k\|_1 = \sum_{k\geq N} \int |g_k(x)|dx \tag{3.66}$$

$$g_k(x) \geq 0 \to = \sum_{k\geq N} \int g_k(x)dx = \lim_{M\to+\infty} \sum_{k=N}^{M} \int g_k(x)dx \tag{3.67}$$

$$\int \text{ ist linear } \to = \lim_{M\to+\infty} \sum_{k=N}^{M} g_k(x)dx = \lim_{M\to+\infty} \int T_{M+1}(x) - T_N(x)dx \tag{3.68}$$

$$= \lim_{M\to+\infty} (\int T_{M+1}(x)dx) - \int T_N(x)dx) \tag{3.69}$$

weil

$$\int T_k(x)dx \leq c \,\forall\, k,\; \exists c' = \lim_{M\to+\infty} \int T_{M+1}(x)dx \tag{3.70}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\exists N_0\colon\; \forall\, N \geq N_0\colon |c' - \int T_N(x)dx| < \varepsilon \tag{3.71}$$

$$\Rightarrow \|f - T_N\|_1 \leq \cdots = \lim_{M\to+\infty} \int T_{M+1}(x)dx - \int T_N(x)dx < \varepsilon \,\forall\, N \geq N_0 \tag{3.72}$$

Also ist f integrierbar und $\int f(x)dx = \lim_{N\to+\infty} \int T_N(x)dx$

4 Exkurs: Quotientenvektorräume

Sei V Vektorraum und sei $W \subset V$ ein Untervektorraum. Man definiert eine Äquivalenzrelation auf V:
Für $u, v \in V$ gilt

$$u \sim v \colon \Leftrightarrow u - v \in W \Leftrightarrow \exists w \in W \,\text{mit}\, u = v + w \tag{4.1}$$

Die Äquivalenzklasse von v:

$$[v] = \{v \in V \colon u \sim v\} = \{u + w \colon w \in W\} =\colon v + w \tag{4.2}$$

$$V \xrightarrow{\pi} \frac{V}{\sim} \text{ mit } v \mapsto \Pi(v) \coloneqq [v] \tag{4.3}$$

Hier definieren wir:

$$\frac{V}{W} \coloneqq \frac{V}{\sim} \tag{4.4}$$

$\frac{V}{W}$ ist ein Vektorraum, gennant "Quotientenvektorraum von V nach W" oder "V modulo W"
Überprüfen ob $\frac{V}{W}$ ein Vektorraum ist:

$$[v] + [\tilde{v}] \coloneqq [v + \tilde{v}](v + W) + (\tilde{v} + W) \coloneqq (v + \tilde{v}) + W \tag{4.5}$$

<u>Ausserdem zu prüfen:</u>

- Wohldefiniert?
- $\lambda[v] \coloneqq [\lambda v]$ wohldefiniert?
- $\Pi \colon V \to \frac{V}{W}$ linear und surjektiv?

5 Nullmengen und Integration

5.1 Integrationssatz für Nullmengen

Sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Sei $\tilde{f} \colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ so, dass $\{x \colon f(x) \neq \tilde{f}(x)\}$ eine Nullmenge ist.
Dann gilt:
$\tilde{f}$ ist integrierbar mit $\int (fx) dx = \int \tilde{f}(x) dx$

Beweis f integrierbar $\Rightarrow$ $\exists$ Treppenfunktionen T_k mit

$$\lim_{k\to+\infty} \|f - T_k\|_1 = 0 \tag{5.1}$$
$$N = \{x\colon f \neq \tilde{f}\} \tag{5.2}$$

ist Nullmenge

$$\Rightarrow \|\chi_N\|_1 = 0 \Rightarrow \|k\|_1 = 0 \,\forall\, k \text{ mit } \{x\colon k(x) \neq 0\} \subset N \tag{5.3}$$

Insebsondere gilt

$$\|f - \tilde{f}\|_1 = 0 \tag{5.4}$$

Da

$$\|\tilde{f} - T_k\|_1 \leq \|\tilde{f} - f\|_1 + \|f - T_k\|_1 \tag{5.5}$$

folgt

$$\lim_{k\to+\infty} \|\tilde{f} - T_k\|_1 = 0 \tag{5.6}$$

$\Rightarrow$ $\tilde{f}$ ist integrierbar mit:

$$\int \tilde{f}(x)dx = \lim_{k\to+\infty} \int T_k(x)dx = \int f(x)dx \tag{5.7}$$

5.2 Nullmengensatz für integrierbare Funktionen

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann gilt:

$$\{x \in \mathbb{R}^n\colon f(x) = +\infty\} \tag{5.8}$$

ist eine Nullmenge.

Beweis f integrierbar

$$\Rightarrow \|f\|_1 < +\infty \tag{5.9}$$
$$\forall c > 0 \,\forall x, z = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\; f(x) = +\infty\}\colon |f(x)| \geq \chi_z(x) \cdot c \tag{5.10}$$
$$\Rightarrow \|f\|_1 \geq \|c \cdot \chi_z(x)\|_1 = c\|\chi_z\|_1 \,\forall\, c > 0 \tag{5.11}$$
$$\Rightarrow \|\chi_z\|_1 = 0 \Leftrightarrow z \text{ ist eine Nullmenge.} \tag{5.12}$$

5.2.1 Folgerung

Sei f integrierbar und

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), f(x) \neq \infty \\ 0, f(x) = \infty \end{cases} \tag{5.13}$$

Dann ist $\tilde{f}$ integrierbar mit

$$\int f(x)dx = \int \tilde{f}(x)dx \tag{5.14}$$

5.3 Definition der trivialen Fortsetzung einer Funktion

Sei $A \subset \mathbb{R}^n, f\colon A \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ Funktion. Die triviale Fortsetzung $\tilde{f}$ von f ist definiert durch:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases} \tag{5.15}$$

"f ist über A integrierbar" $\Leftrightarrow$ "$\tilde{f}$ ist integrierbar"

5.3.1 Notation

$$\int\limits_A f(x)dx = \int \tilde{f}(x)dx \tag{5.16}$$

Ziel

Zu zeigen: Seien A "vernünftig" und $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ "vernünftig", dann ist f über A integrierbar.

5.4 Definiton was "vernünftig" heißen soll

"Vernünftig" heißt: offen/kompakt, stetig, beschränkt.

5.5 Satz und Definition über von unten halbstetige Funktionen

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion, $p \in \mathbb{R}^n$, dann sind äquivalent:

1.
$$\lim_{x \to p} \inf(f(x)) \geq f(p) \tag{5.17}$$

2.
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; f(x) > f(p) - \varepsilon \; \forall \, x \text{ mit } |x - p| < \delta \tag{5.18}$$

Wenn eine dieser Bedingungen erfüllt wird, so ist f "in p von unten halbstetig".

Erinnerung

$$f \text{ stetig } \Leftrightarrow \lim_{x\to p} f(x) = f(p)$$
$$|f(x) - f(p)| < \varepsilon \text{ falls } |x-p| < d \Leftrightarrow f(p) + \varepsilon > f(x) > f(p) - \varepsilon$$

Beweis (1. $\Rightarrow$ 2.) $\lim_{x\to p} \inf f(x) \geq f(p)$ bedeutet, dass für jede Folge x_k mit $\lim_{k\to+\infty} = p$ der kleinste Häufungspunkt in $\overline{\mathbb{R}}$ mindestens $f(p)$ genau dann, wenn für jede Folge x_k mit

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = p \text{ und} \tag{5.19}$$
$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = c \in \overline{\mathbb{R}} \tag{5.20}$$

gilt: $c \geq f(p)$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.
Wir zeigen 2. indirekt.
Annahme:

$$\forall \delta > 0\colon\ \exists x_\delta\colon |x_\delta - p| < \delta \quad f(x_0) \leq f(p) - \varepsilon. \tag{5.21}$$

Für $\delta = \frac{1}{k}$ erhalten wir die Folge:

$$y_k = x_{\delta=\frac{1}{k}} \tag{5.22}$$
$$|y_k - p| < \frac{1}{k} = \delta, f(y_k) \leq f(p) - \varepsilon \tag{5.23}$$

Das heißt

$$\lim_{k\to+\infty} y_k = p \text{ und } \lim_{k\to+\infty} f(y_k) \leq f(p) - \varepsilon < f(p) \tag{5.24}$$

falls

$$\lim_{k\to+\infty} y_k = \exists \text{ in } \overline{\mathbb{R}} \text{ Widerspruch zur Annahme} \tag{5.25}$$

(2. $\Rightarrow$ 1.) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

$$\exists \delta\colon |x-p| < \delta \Rightarrow f(x) > f(p) - \varepsilon \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \inf f(x_k) \geq f(p) - \varepsilon \tag{5.26}$$

für jede Folge x_n mit

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = p \tag{5.27}$$
$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \inf f(x_n) \geq f(p) \tag{5.28}$$

weil $\lim_{k\to+\infty} x_k = p\, \forall\, \varepsilon > 0$ gilt.

5.5.1 Beispiel (offen)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist χ_U von unten halbstetig.

Beweis Sei $p \notin U$. Dann gilt:

$$\chi_k(p) = 0 \text{ und } \chi_k(x) \leq \{0, 1\} \,\forall\, x \tag{5.29}$$

Insbesondere:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \colon \; \forall\, \varepsilon > 0 \colon \; \chi_k(x) \geq 0 > \chi_k(p) - \varepsilon = -\varepsilon \tag{5.30}$$

(dann kann δ beliebig gewählt werden). Sei $p \in U$. Dann gilt:

$$U \text{ offen } \Rightarrow \exists \delta \colon \; \forall\, x \colon |x - p| < \delta \Rightarrow x \in U \tag{5.31}$$

$$\text{das heißt } \exists \delta \colon \; \forall\, x \colon |x - p| < \delta \Rightarrow x \in U \Rightarrow \chi_k(x) = 1 = \chi_k(p) \tag{5.32}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \colon \; \chi_k(x) > \chi_k(p) - \varepsilon \tag{5.33}$$

5.5.2 Beispiel (abgeschlossen)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen $\Rightarrow -\chi_A$ ist von unten halbstetig.

5.6 Approximationssatz für halbstetige Funktionen

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $f \colon \; U \to \mathbb{R}$ von unten halbstetig, beschränkt, und $f(x) \geq 0 \,\forall\, x \in U$. Dann gilt, dass eine Folge von Treppenfunktionen $T_k \colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ mit

$$\lim_{k \to +\infty} T_k(x) = \begin{cases} f(x), & x \in U \text{ und } T_{k+1} \geq T_k \,\forall\, k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{5.34}$$

existiert.

5.6.1 Alternative Formulierung (Freitag)

$U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, $f \colon U \to \mathbb{R}$ von unten halbstetig. Sei $f(x) \geq 0 \,\forall\, x \in U$ Dann gibt es eine Folge von Treppenfunktionen T_k mit

$$T_{k+1}(x) \geq T_{(}x) \,\forall\, x, k \tag{5.35}$$

und

$$\lim_{k \to +\infty} T_k(x) = f(x) \,\forall\, x \in U \tag{5.36}$$

und

$$\lim_{k \to +\infty} t_k(x) = 0 \text{ für } x \notin U \tag{5.37}$$

Beweis Sei $\tilde{f}$ die triviale Fortsetzung von f, das heißt:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \in U \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \tag{5.38}$$

Wir definieren:

$$\begin{aligned} T_0(x_1, \ldots, x_n) &\coloneqq \inf\{\tilde{f}(y_1, \ldots, y_n) \colon \lfloor x_k \rfloor = \lfloor y_k \rfloor \; \forall \, k \in \{1, \ldots, n\}\} && (5.39)\\ &= \text{"Infimum von } \tilde{f} \text{ über Quader der } y \in \mathbb{R}^n\text{"} && (5.40)\\ T_m(x_1, \ldots, x_n) &\coloneqq \inf\{\tilde{f}(y_1, \ldots, y_n) \colon \lfloor x_k 2^m \rfloor = \lfloor y_k 2^m \rfloor \; \forall \, k \in \{1, \ldots, n\}\} && (5.41) \end{aligned}$$

<u>Fakten:</u>

1. U beschränkt $\Rightarrow$ Es gibt nur endlich viele Würfel der Form

$$W_m(p) = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \colon \lfloor y_k 2^m \rfloor = \lfloor p_k 2^m \rfloor\} \text{ mit } W_m(p) \cup U \neq \{\} \tag{5.42}$$

2. T_m ist auf jedem der W_m(p) konstant.

3. T_m ist Treppenfunktion, das es endlich viele $p_1, \ldots, p_s; c_1, \ldots, c_s$ mit

$$T_m(x) = \sum_{j=1}^{s} c_j \chi_{W_m(p_j)}(x) \tag{5.43}$$

gibt. (Wenn $W_m(p) \cap U = \{\}$, dann gilt $T_m(x) = 0 \, \forall \, x \in W_m(p)$)

4. <u>Erste Hilfsbehauptung:</u>

$$\forall m, p \colon W_{m+1}(p) < W_m(p) \tag{5.44}$$

<u>Beweis der ersten Hilfsbehauptung:</u>

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \inf\{\tilde{f}(x) \colon x \in W_m + 1(p)\} \geq \inf\{\tilde{f}(x) \colon x \in W_m(p)\} && (5.45)\\ &\Rightarrow T_{m+1}(x) \geq T_m(x) \, \forall \, m, x, \text{ das heißt } \exists \; T_k \text{ mit } T_{k+1} \geq T_k && (5.46) \end{aligned}$$

HB

5.

$$\begin{aligned} \forall x \colon x \in W_m(x) \, \forall \, x \colon \; &\Rightarrow \tilde{f} \geq \inf\{\tilde{f}(x) \colon y \in W_m(x)\} && (5.47)\\ &\Leftrightarrow f(x) \geq T_m(x) \, \forall \, m, x && (5.48) \end{aligned}$$

6. Zweite Hilfsbehauptung:

$$\forall x\colon \tilde{f}(x) \geq 0 \Rightarrow T_m(x) \geq 0 \, \forall \, x \tag{5.49}$$

Beweis der zweiten Hilfsbehauptung:

$$\text{Für } x \notin U: T_m(x) \geq 0 \text{ und } 0 = \tilde{f}(x) \geq T_m(x) \tag{5.50}$$
$$\Rightarrow T_m(x) = 0 \, \forall \, x \notin U \Rightarrow \lim_{m\to+\infty} T_m(x) = \tilde{f}(x) = 0 \, \forall \, x \notin U \tag{5.51}$$

HB

7. Sei $x \in U$. Es gilt:

$$T_m(x) = \inf\{\tilde{f}(y)\colon y \in W_m(x)\} \tag{5.52}$$
$$\Rightarrow \exists \, p_m \in W_m(x)\colon \tilde{f}(p_m) \leq T_m(x) + 2^{-m} \tag{5.53}$$

Dritte Hilfsbehauptung:

$$\forall q \in W_m(x)\colon \|p_m - x\|_\infty \leq \frac{n}{2^m} \tag{5.54}$$

Beweis der dritten Hilfsbehauptung:

$$q \in W_m(x)\colon \lfloor q_k 2^m \rfloor = \lfloor x_k 2^m \rfloor \, \forall \, k \tag{5.55}$$
$$\Rightarrow |q_k 2^m - x_k 2^m| < 1 \, \forall \, k \tag{5.56}$$
$$\Rightarrow |q_k - x_k| < 2^{-m} \tag{5.57}$$
$$\Rightarrow \|q_k - x\|_\infty = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (q_k - x_k)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{2^m}\Big)^2} = \sqrt{n}\frac{1}{2^m} \leq \frac{n}{2^m} \tag{5.58}$$

HB

Daher:

$$\forall m\colon \|p_m - x\|_\infty < n 2^{-m} \Rightarrow \qquad \lim_{m\to+\infty} \|p_m - x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \lim_{m\to+\infty} p_m = x \tag{5.59}$$

Da U offen gilt o.B.d.A. $p_m \in U$. Weil f halbstetig auf U folgt:

$$\lim_{m\to+\infty} \inf f(p_m) \geq f(x) \tag{5.60}$$

8.

$$f(p_m) = \tilde{f}(p_m) \leq T_m(x) + 2^{-m} \tag{5.61}$$
$$\Rightarrow \lim_{m\to+\infty} \inf f(p_m) \leq \lim_{m\to+\infty} \inf T_m(x) \text{ da } \lim_{m\to+\infty} 2^{-m} = 0 \tag{5.62}$$

Insgesamt:

$$f(x) \underset{(5.48)}{\geq} \lim_{m\to+\infty} \inf T_m(x) \underset{(5.62)}{\geq} \lim_{m\to+\infty} \inf f(p_m) \underset{(5.60)}{\geq} f(x) \tag{5.63}$$

$$f(x) = \lim_{m\to+\infty} \inf T_m(x) \xRightarrow[T_(x)\leq f(x)\,\forall\, m]{} f(x) = \lim_{m\to+\infty} T_m(x) \tag{5.64}$$

5.6.2 Folgerung

Seien $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $f\colon A \to \mathbb{R}$ von unten halbstetig und beschränkt. Dann ist f über A integrierbar.

Beweis Fall 1:
$f(x) \geq 0\, \forall\, x \in \mathbb{R}^n$
Nach obigem Satz existieren T_k mit $T_{k+1} \geq T_k$ und $\lim_{k\to+\infty} T_k = f$.
A beschränkt $\Rightarrow A \subset Q$ Quader.
f beschränkt:

$$\Rightarrow |f(x)| \leq M\,\forall\, x\, \exists M \Rightarrow T_k \leq M\,\forall\, x \tag{5.65}$$

$$\Rightarrow \int T_k(x)dx \leq M \cdot \mathrm{Vol}(Q)\,\forall\, k \tag{5.66}$$

das heißt wir können den Satz von Beppo Levi anwenden $\Rightarrow f$ integrierbar.
Fall 2:
f beschränkt impliziert:

$$\exists M\colon |f(x)| \leq M\,\forall\, x \tag{5.67}$$

Definiere:

$$f_1 = f + M \cdot \chi_A, \qquad f_2 = M \cdot \chi_A \tag{5.68}$$

$$\Rightarrow f = f_1 - f_2 \text{ und } f_i(x) \geq 0\,\forall\, x\,\forall\, i \in \{1, 2\} \tag{5.69}$$

f ist von unten halbstetig $\Rightarrow f_1$ ist von unten halbstetig auf A. f ist konstant auf $A \Rightarrow f_2$ ist von unten halbstetig auf A. $\Rightarrow f_1, f_2$ sind integrierbar (siehe Fall 1). Also ist $f = f_1 - f_2$ integrierbar.

5.7 Satz über die Integrierbarkeit einer stetigen Funktion auf einem kompakten Intervall

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f\colon k \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f über K integrierbar.

Beweis K kompakt, f stetig, also gilt:

$$\exists M\colon |f(x)| \leq M \,\forall\, x \in K \tag{5.70}$$

Wähle U offen und beschränkt mit $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$. Definiere

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - M, & x \in K \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \tag{5.71}$$

Hilfsbehauptung g ist auf U von unten halbstetig.
Beweis der Hilfsbehauptung:
Aus

$$|f(x)| \leq M \,\forall\, x \in K \tag{5.72}$$

folgt:

$$f(x) - M \leq 0 \,\forall\, x \in K \Rightarrow g(x) \leq 0 \,\forall\, x \tag{5.73}$$

HB

Sei x_m eine Folge in U mit

$$\lim_{m\to+\infty} x_m = x \in U \tag{5.74}$$

Fall 1:

$$x \notin K \Rightarrow x \in U \setminus K \tag{5.75}$$

Weil U offen und K abgeschlossen, gilt:

$$\begin{aligned} U \setminus K \text{ ist offen } &\Rightarrow x_m \in U \setminus K \,\forall\, m > M \,\exists\, M && (5.76)\\ &\Rightarrow \forall m > M\colon g(x_m) = 0 \Rightarrow \lim_{m\to+\infty} g(x_m) = 0 = g(x) && (5.77) \end{aligned}$$

Fall 2a:

$$x \in K, \lim_{m\to+\infty} x_m = x, x_m \in U. \tag{5.78}$$

Fast alle x_m liegen in $U \setminus K$, das heißt

$$\exists M\colon\ \forall\, m \geq M\colon x_m \in U \setminus K \tag{5.79}$$

Dann gilt:

$$\lim_{m\to+\infty} g(x_m) = 0 \geq g(x), \text{ da } x \in K \Rightarrow g(x) = 0 \tag{5.80}$$

<u>Fall 2b:</u>

$$x \in K, \lim_{m \to +\infty} x_m = x \tag{5.81}$$

und unendlich viele $x_m \in K$. Betrachte Teilfolge y_l so, dass

$$\{y_l : l \in \mathbb{N}\} = \{x_m : m \in \mathbb{N}, x_m \in K\} \tag{5.82}$$

$$\lim_{l \to +\infty} = x \xRightarrow[f \text{ stetig in } K]{} \lim_{l \to +\infty} f(y_l) = f(x) \Rightarrow \lim_{l \to +\infty} g(y_l) = g(x) \tag{5.83}$$

Da $g(x_m) = 0$ falls $X_m \notin K$, folgt aus $\lim_{l \to +\infty} g(y_l) = g(x)$, dass nur $g(x)$ und 0 Häufungspunkte von $\{g(x_m) : m \in \mathbb{N}\}$ sein. Also

$$\lim_{m \to +\infty} \inf g(x_m) \geq \min\{g(x), 0\} = g(x) \text{ weil } g(x) \leq 0 \tag{5.84}$$

Das heißt g ist auf der offenen Menge U von unten halbstetig, daraus folgt die Integrierbarkeit.
<u>Analog:</u> $-M\chi_k$ ist integrierbar, daraus folgt $f(x) = g(x) - (-M\chi_k)$ ist auch integrierbar.

5.8 Satz über die Gleichheit des Lebesgue-Integrals mit dem Riemann-Integral

Seien $a \leq b$, $f[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f Lebesgue-integrierbar und

$$\text{Lebesgue-Integral} \to \int_{[a,b]} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \leftarrow \text{ Riemann-Integral} \tag{5.85}$$

Beweis $[a,b]$ kompakt $\Rightarrow f$ ist Lebesgue-integrierbar. Aus Ana II folgt: Es gibt Treppenfunktionen T_k, die gegen f gleichmäßig konvergieren. Das heißt

$$\lim_{k \to +\infty} \|T_k - f\|_\infty = 0 \text{ wobei } \|g(x)\|_\infty = \sup\{|g(x)| : x \in [a,b]\} \tag{5.86}$$

Nun gilt:

$$\|T_k - f\|_1 \leq |b-a| \cdot \|T_k - f\|_\infty \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} \|T_k - f\|_1 = 0 \tag{5.87}$$

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \lim_{k \to +\infty} \int_a^b T_k(x)dx = \int_a^b f(x)dx \tag{5.88}$$

5.9 Satz von Fubini, 1. Version

Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^n, U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offen, beschränkt, $U = U_1 \times U_2$. $f\colon U \to \mathbb{R}$ von unten halbstetig, beschränkt.
Dann gilt: Für alle $x \in U_1$ ist die Funktion $y \to f(x,y)$ integrierbar über U_2 und die durch

$$g(x) = \int\limits_{U_2} f(x,y)dy \tag{5.89}$$

definierte Funktion ist auch integrierbar und

$$\int\limits_{U_1} g(x)dx = \int\limits_{U} f(x,y)d(x,y) \tag{5.90}$$

ist das Integral von f über U

5.9.1 Beispiel

$$U_1 =]0,1[, \qquad U_2 =]2,3[, \qquad f(x,y) = x^2 + xe^y \tag{5.91}$$

$$\int\limits_{U_1 \times U_2} f(x,y)d(x,y) = \int\limits_{U_1}\int\limits_{U_2} f(x,y)dydx = \int\limits_{U_1}\int\limits_{2}^{3} x^2 + xe^y dydx \tag{5.92}$$

$$= \int\limits_{U_1} 3x^2 - 2x^2 + x(e^3 - e^2)dx = \int\limits_{0}^{1} x^2 + x(e^3 - e^2)dx \tag{5.93}$$

$$= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} + (\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2})(e^3 - e^2) \tag{5.94}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(e^3 - e^2) \tag{5.95}$$

5.9.1.1 Bemerkung

Aus Fubini folgt:

$$\int\limits_{U_1}\int\limits_{U_2} f(x,y)dydx = \int\limits_{U_2}\int\limits_{U_1} f(x,y)dxdy \tag{5.96}$$

Das heißt im Beispiel:

$$\int\limits_{U_1 \times U_2} x^2 + xe^y d(x,y) = \int\limits_{U_2}\int\limits_{0}^{1} x^2 + xe^y dxdy \tag{5.97}$$

$$= \int\limits_{2}^{3} \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^y dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(e^3 - e^2) \tag{5.98}$$

Beweis des Satzes f integrierbar folgt aus dem Satz von Beppo Levi.
f von unten halbstetig: Es gilt o.B.d.A. $f(x,y) \geq 0 \,\forall\, x, y$. Daraus folgt: Es gibt Treppenfunktionen T_n mit:

$$T_n(x,y) \geq 0 \,\forall\, n, x, y \tag{5.99}$$
$$T_{n+1}(x,y) \geq T_n(x,y) \,\forall\, n, x \tag{5.100}$$
$$\lim_{n\to+\infty} T_n(x,y) = f(x,y) \,\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{5.101}$$

Fall: $f = T_n$
Sei $Q = Q_1 \times Q_2$ ein Quader mit $Q \subset U$. Dann gilt

$$\mathrm{Vol}(Q) = \int \chi_Q d(x,y) = \mathrm{Vol}(Q_1) \cdot \mathrm{Vol}(Q_2) \tag{5.102}$$

Sei $h(x,y) = \chi_Q(x,y)$ und $h_x \colon y \to \chi_Q(x,y)$, das heißt

$$h_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (x,y) \in Q \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \Leftrightarrow h_x(y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \notin Q_1 \\ \chi_{Q_2}(y), & \text{falls } x \in Q_1 \end{cases} \tag{5.103}$$

Also sind die h_x integrierbar und

$$\int\limits_{U_2} h_x(y)dy = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in Q_1 \\ \mathrm{Vol}(Q_2)(y), & \text{falls } x \in Q_1 \end{cases} \tag{5.104}$$
$$\Rightarrow \int\limits_{U_2} h_x(y)dy = \mathrm{Vol}(Q_2) \cdot \chi_{Q_1}(x) \tag{5.105}$$
$$\Rightarrow \int\limits_{U_1}\int\limits_{U_2} h_x(y)dydx = \int\limits_{U_1} \mathrm{Vol}(Q_2) \cdot \chi_{Q_1}(x)dx = \mathrm{Vol}(Q_2) \cdot \mathrm{Vol}(Q_1) \tag{5.106}$$
$$= \mathrm{Vol}(Q_1 \times Q_2) = \mathrm{Vol}(Q). \tag{5.107}$$

Also gilt für jeden Quader $Q \subset U$ der Satz von Fubini, das heißt

$$\int\limits_{U_1}\int\limits_{U_2} \chi_Q(x,y)dydx = \int\limits_{U} \chi_Q(x,y)d(x,y) \tag{5.108}$$

Weil Integrale linear, gilt der Satz von Fubini auch für Treppefunktionen.
Also gilt:

$$y \mapsto T_n(x,y) \tag{5.109}$$

ist integrierbar $\forall n, x$. Wir setzten:

$$S_n(x) = \int\limits_{U_2} T_n(x,y)dy \tag{5.110}$$

Weil Fubini für Trepenfunktionen gilt, folgt $\forall n$:

$$\int_U T_n(x,y)d(x,y) = \int_{U_1} S_n(x)dx = \int_{U_1}\int_{U_2} T_n(x,y)dydx \tag{5.111}$$

$f_x \colon y \to f(x,y)$ ist integrierbar über U weil f von unten halbstetig, beschränkt und U beschränkt. Aus dem Satz von Beppo Levi folgt $\forall x$:

$$\int_{U_2} f(x,y)dy = \lim_{n\to+\infty} S_n(x)dx \tag{5.112}$$

Ebenfalls kann man aus dem Satz von Beppo Levi folgern:

$$\int_U f(x,y)d(x,y) = \lim_{n\to+\infty}\int_U f(x,y)d(x,y) = \lim_{n\to+\infty}\int_{U_1} S_n(x) \tag{5.113}$$

Da nun aber die S_n auch Treppenfuktionen sind, und da

$$\int_{U_2} f(x,y)dy = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) \text{ und } T_{n+1} \geq T_n \,\forall\, n \Rightarrow S_{n+1} \geq S_n \,\forall\, n \tag{5.114}$$

folgt erneut aus Beppo Levi:

$$\int_{U_1}\int_{U_2} f(x,y)dydx = \lim_{m\to+\infty}\int_{U_1} S_n(x)dx \tag{5.115}$$

Also

$$\int_U f(x,y)d(x,y) = \lim_{m\to+\infty}\int_{U_1} S_n(x)dx = \int_{U_1}\int_{U_2} f(x,y)dydx \tag{5.116}$$

⌂

5.9.2 Folgerung: Anwendung des Satztes von Fubini über kompakte Mengen

Seien K_1, K_2 kompakt in $\mathbb{R}^n$ beziehungsweise $\mathbb{R}^m$, $f \colon K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt der Satz von Fubini, das heißt

$$\int_K f(x,y)d(x,y) = \int_{K_1}\int_{K_2} f(x,y)dydx \tag{5.117}$$

Beweis K kompakt $\Rightarrow$ K beschräkt $\Rightarrow$ $\exists\, R$

$$K \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \colon \|x\|_\infty < R \text{ und } \|y\|_\infty < R\}. \tag{5.118}$$

Dann ist

$$K \subset U = U_1 \times U_2 \text{ mit} \tag{5.119}$$

$$U_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_\infty < R\}, U_2 = \{y \in \mathbb{R}^m \colon \|y\|_\infty < R\} \tag{5.120}$$

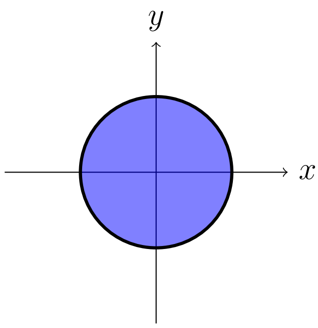
wobei U_1, U_2 offen und beschränkt sind. Für $M = \sup|f(x,y)|$ gilt nun:

$$f(x,y) = g(x,y) - M\chi_K(x,y), g(x,y) = f(x,y) + M\chi_K(x,y) \tag{5.121}$$

Also sind sowohl g als auch $-M\chi_K$ halbstetig.

5.9.3 Beispiele über ...

5.9.3.1 ... die Anwendung bei Kreisflächen



$$\text{Sei } K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\} \tag{5.122}$$

Gesucht

$$\int \chi_K(x,y) d(x,y) \tag{5.123}$$

Für festes x gilt:

$$\chi_K(x,y) = \begin{cases} 1, x^2 + y^2 \leq 1 \Leftrightarrow |y| \leq \sqrt{1 - x^2} \\ 0, \text{ sonst} \end{cases} \tag{5.124}$$

das heißt für festes $x \in [-1,1]$ gilt:

$$\begin{aligned}
\chi_K(x,y) =& \chi_{[-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}]}(y) && (5.125)\\
\Rightarrow \int \chi_K(x,y)dy =& \begin{cases} 2\sqrt{1-x^2}, x \leq 1 \\ 0, \text{ sonst} \end{cases} && (5.126)\\
\Rightarrow \iint \chi_K(x,y)dydx =& \int\limits_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}dx && (5.127)\\
\text{mit } x = \cos(t), \sqrt{1-x^2} = \sin(t) \text{ folgt } :& \int\limits_{\pi}^{0} 2\sin(t)(-\sin(t))dt && (5.128)\\
=& -2\int\limits_{\pi}^{0} \sin^2(t)dt && (5.129)
\end{aligned}$$

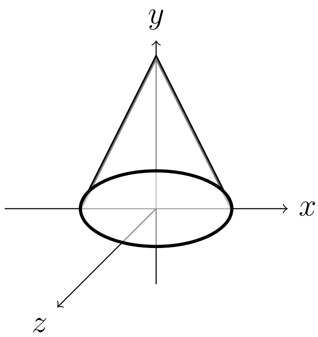
Nebenrechnung:

$$cos(2t) = cos^2(t) - sin^2(t) = 1 - 2sin^2(t) \tag{5.130}$$

weil $\cos^2 + \sin^2 = 1$ gilt. Also folgt

$$\int\limits_{\pi}^{0} -2sin^2(t)dt = \int\limits_{\pi}^{0} cos(2t) - 1dt = \pi \tag{5.131}$$

5.9.3.2 ... die Anwendung bei Kegeln



5.9.3.2.1 Definition von Kegeln Sei $K \subset \mathbb{R}^2$. Der Kegel über K ist die Menge aller Punkte im $\mathbb{R}^3$, die zwischen $K \times \{0\}$ und $(0,0,1)$ liegen. Das heißt C= Kegel über

$$\begin{aligned}
K =& \{v \in \mathbb{R}^3 \colon \exists\, p \in K \times \{0\} \colon v \text{ liegt auf der Strecke zwischen } p \text{ und } (0,0,1)\} && (5.132)\\
=& \{v \colon \exists\, p \in K \colon \exists\, t(p_1,p_2,0) + (1-t)(0,0,1)\} && (5.133)\\
\Rightarrow& (v_1,v_2,v_3) \in C && (5.134)\\
\Leftrightarrow& \exists\, t \in [0,1] v_1 = tp_1, v_2 = tp_2, v_3 = (1-t) \text{ weil } (p_1,p_2) \in K && (5.135)\\
\Leftrightarrow& v_3 \in [0,1] \colon (v_1,v_2) \in (1-v_3)K && (5.136)
\end{aligned}$$

5.9.3.2.2 Berechnung des Integrals

$$\mathrm{Vol}(C) = \iint \chi_C(v_1, v_2, v_3) d(v_1, v_2) dv_3 \tag{5.137}$$

$$= \iiint \chi_{(1-v_3)K}(v_1, v_2) d(v_1, v_2) dv_3 \tag{5.138}$$

$$= \int_0^1 (1 - v_3)^2 \mathrm{Vol}(K) dv_3 \tag{5.139}$$

$$= -\left[\frac{(1-v_3)^3}{3}\mathrm{Vol}(K)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\mathrm{Vol}(K) \tag{5.140}$$

Aus Fubini folgt, dass das Volumen des Kegels gleich der Höhe mal der Grundbreite ($\mathrm{Vol}(K)$) mal $\frac{1}{3}$ ist.

6 Messbare Mengen

6.1 Definition von lokaler Integrierbarkeit

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. f heißt lokal integrierbar falls gilt:

$$\forall p \in \mathbb{R}^n\colon\ \exists\, U \text{ offen}\,, p \in U\colon\ f \text{ ist über } U \text{ integriebar.} \tag{6.1}$$

6.1.1 Beispiel über konstante Funktionen

Sei f konstant mit Wert $c \neq 0$. f ist über jede offene beschränkte Menge integrierbar also ist f lokal integrierbar.

6.2 Definition der Messbarkeit von Mengen

$A \subset \mathbb{R}^n$ heißt messbar, falls χ_a lokal integrierbar ist.

6.3 Satz über lokal intergrierbare Funktionen auf offenen Mengen

Sei f lokal integrierbrar und sei U offen und beschränkt. Dann ist f über U integrierbar.

Beweis $\overline{U}$ ist kompakt, da abgeschlossen und beschränkt.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \in U \\ 0, \text{ sonst} \end{cases} \tag{6.2}$$

f integrierbar über U genau dann wenn $\tilde{f}$ integrierbar über $\overline{U}$, da $\tilde{f}$ die triviale Fortsetzung von f ist. Zu jedem Punkt $p \in \overline{U}$ wählen wir $W_p \subset \mathbb{R}^n$ offen so, dass f über W_p integrierbar ist. Dies geht, weil f lokal integrierbar ist. $\overline{U}$ kompakt,

$$\begin{aligned} \overline{U} \subset \cup_p W_p \Rightarrow \; &\exists \text{ "endliche Teilüberdeckung"} && (6.3)\\ \Rightarrow \; &\exists\, p_1, \dots, p_s \colon \overline{U} \subset W_{p_1} \subset \cdots \subset W_{p_s} && (6.4) \end{aligned}$$

Weiterhin gilt: f ist integrierbar $\Rightarrow \tilde{f}$ integrierbar. $\tilde{f}$ ist integrierbar über jeden der $W_{p_i} \Rightarrow \tilde{f}$ ist über $W_{p_1} \cup \cdots \cup W_{p_s}$ integrierbar $\Rightarrow \tilde{f}$ ist integrierbar über $\overline{U} \Rightarrow f$ ist integrierbar über U.

6.4 Integrationssatz für charakteristische Funktionen

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt, dass entweder χ_A integriebar ist, oder

$$\sup_U \int_U \chi_A(x)dx = +\infty \tag{6.5}$$

Beweis Für $R \in \mathbb{R}$ betrachte

$$U_R = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_\infty < R\} \tag{6.6}$$

als den Ball um x mit Radius R.

$$\begin{aligned} A \text{ messbar } &\Leftrightarrow \chi_A \text{ lokal integrierbar} && (6.7)\\ &\Rightarrow \chi_A \text{ ist über jedes } U_R \text{ integrierbar } \Leftrightarrow \chi_{A\cap U_R} \text{ ist integrierbar} && (6.8) \end{aligned}$$

<u>Fall 1:</u>

$$\sup_R \int_U \chi_{A\cap U_R}(x)dx < +\infty \tag{6.9}$$

Dann gilt für $k \in \mathbb{N}$:

$$g_k(x) \coloneqq \chi_{A\cap U_R}(x) \tag{6.10}$$

ist integrierbar und

$$g_{k+1} \geq g_k \; \forall \, k \text{ und } \lim_{k\to+\infty} g_k(x) = \chi_A(x) \tag{6.11}$$

Und daraus folgt, dass χ_A nach Beppo Levi integrierbar ist.
<u>Fall 2:</u>

$$\sup_R \int_U \chi_{A\cap U_R}(x)dx = +\infty \tag{6.12}$$

$$\Rightarrow \sup_U \int_U \chi_{A\cap U_R}(x)dx < \infty \tag{6.13}$$

da U beschränkt und offen.

6.4.1 Bemerkung über das Volumen einer messbaren Menge

Für eine messbare Menge A definiert

$$\mathrm{Vol}(A) = \begin{cases} \int \chi_A(x), & \chi_A \text{ integrierbar} \\ +\infty, & \chi_A \text{ nicht integrierbar} \end{cases} \tag{6.14}$$

6.5 Lemma über die Sigma-Additivität

Sei A_k eine Folge von messbaren Mengen. Wenn die Mengen A_k disjunkt sind, dann gilt:

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \text{ ist messbar mit } \mathrm{Vol}(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}(A_k) \tag{6.15}$$

Beweis Setze

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}(x) = \chi_{A_1\cup\dots\cup A_n}(x) \tag{6.16}$$

Es gilt:

$$f_{n+1}(x) \geq f_n(x)\,\forall\, n\,\forall\, x \tag{6.17}$$

das heißt f_n ist monoton steigend. Falls

$$x \notin A, \text{ gilt } f_n(x) = 0\,\forall\, n \in \mathbb{N} \tag{6.18}$$

$$x \in A \Rightarrow\ \exists\, k\colon x \in A_k \Rightarrow f_n(x) = 1\,\forall\, n \geq k \tag{6.19}$$

folgt insgesamt:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \chi_A(x) \tag{6.20}$$

Fall 1:

$$\exists k\colon \mathrm{Vol}(A_k) = +\infty \tag{6.21}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Vol}(A) = +\infty \tag{6.22}$$

Fall 1 klar. Fall 2:

$$\mathrm{Vol}(A_k) < +\infty \Rightarrow \chi_{A_k} \text{ integrierbar} \tag{6.23}$$

Also können wir den Satz von Beppo Levi anwenden und es gilt:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \int \chi_{A_k} dx = \lim_{n\to+\infty} \int f_n(x)dx \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \tag{6.24}$$

Entweder ist:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) < +\infty \text{ und } \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}(A_k) = \lim_{n\to+\infty} \int f_n(x)dx = \int \chi_A(x)dx = \mathrm{Vol}(A) \tag{6.25}$$

oder:

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n(x)dx = +\infty \Rightarrow \mathrm{Vol}(A) = +\infty \tag{6.26}$$

6.5.1 Nachtrag/Hilfsbehauptung: Warum ist A messbar?

Zu zeigen: Wenn B eine beschränkte offene Menge ist, dann ist χ_A über B integrierbar, weil A-messbar ist dies äquivalent dazu, dass χ_A lokal integrierbar ist.

Beweis A_k messbar $\Rightarrow \chi_{A_k}$ ist über B integrierbar $\Leftrightarrow \chi_{A_k \cup V}$ ist integrierbar.
Weil B beschränkt und offen, gilt:

$$\mathrm{Vol}(B) < +\infty \Rightarrow \int\limits_B f_n(x)dx \leq \mathrm{Vol}(B) \tag{6.27}$$

Nach Beppo Levi folgt: $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \chi_A(x)$ ist über B integrierbar.

HB

L

6.6 Satz über messbare Mengen

Es gilt:

1. Jede offene Menge ist messbar.
2. Jede abgeschlossene Menge ist messbar.
3. Wenn A messbar ist, dann auch $\mathbb{R}^n \setminus A$.
4. Wenn A_k eine abzählbare Familie messbarer Menge ist, dann sind $\bigcup_k A_k$ und $\bigcap_k A_k$ messbar.

Beweis

1. A offen $\Rightarrow \chi_A$ von unten halbstetig. Da χ_A von unten halbstetig und beschränkt $\Rightarrow \chi_A$ lokal integrierbar $\Rightarrow A$ messbar
2. A abgeschlossen $\Rightarrow -\chi_A$ von unten halbstetig $\Rightarrow -\chi_A$ lokal integrierbar $\Rightarrow \chi_A$ lokal integrierbar $\Rightarrow A$ messbar
3. Sei B beschränkt und offen. Dann gilt

   $$\chi_B = \chi_{A\cup B} + \chi_{B\setminus A} \tag{6.28}$$

   Daher: A messbar $\Rightarrow \chi_A$ ist integrierbar über $B \Leftrightarrow \chi_{A\cap B}$ integrierbar $\Rightarrow \chi_{B\setminus A}$ integrierbar $\Rightarrow B\setminus A$ messbar $\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus A$ messbar

4. Vorbemerkung: f, g integrierbar $\Rightarrow \min\{f, g\} = -\max\{f, g\}$ integrierbar.
   Deshalb:
   B, C messbar $\Rightarrow B \cap C$ messbar, da $\chi_{B \cap C} = min\{\chi_B, \chi_C\}$. Sei A_k eine abzählbare Familie.
   Idee: Projiziere disjunkte Familie aus der gegebenen Ebene. Setze:

$$B_k := A_k \setminus (A_{k-1} \cup \cdots \cup A_1) \tag{6.29}$$

   Nun gilt:

$$\bigcup_k B_k = \bigcup_k A_k = A \text{ und } B_k \cap B_l = \{\} \text{ für } k \neq l \tag{6.30}$$

$$\begin{aligned} A_k \text{ messbar } \Rightarrow & \mathbb{R}^n \setminus A_k \text{ messbar} && (6.31)\\ \Rightarrow & (\mathbb{R}^n \setminus A_1) \cap \cdots \cap (\mathbb{R}^n \setminus A_{k-1}) \text{ messbar} && (6.32)\\ \Rightarrow & A_k \cap (\mathbb{R}^n \setminus A_{k-1}) \cap \cdots \cap (\mathbb{R}^n \setminus A_1) && (6.33)\\ = & A_k \setminus (A_{k-1} \cup \cdots \cup A_1) = B_k \text{ messbar} && (6.34) \end{aligned}$$

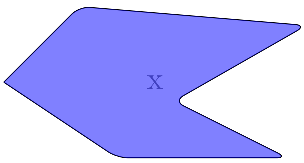
   Also: B_k messbar. aus dem Lemma über σ-Additivität folgt:

$$\bigcup_k B_k \text{ messbar } \Leftrightarrow \bigcup_k A_k \text{ messbar} \tag{6.35}$$

   Noch zu zeigen: $\bigcap_k A_k$ ist messbar. Gilt, da

$$\bigcap_k A_k = \mathbb{R}^n \setminus \Big[\bigcup_k (\mathbb{R}^n \setminus A_k)\Big] \tag{6.36}$$

6.7 Definition des Schwerpunktes einer beschränkten Menge



Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Wenn x_i über A integrierbar sind (z.B. dann, wenn A offen oder abgeschlossen ist), dann heißt:

$$\mathbb{R}^n \ni S = \Big(\int_A x_1 d(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \int_A x_n d(x_1, \ldots, x_n)\Big) \frac{1}{\mathrm{Vol}(A)} = \mathrm{S}(A) \tag{6.37}$$

6.8 Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz

Seien f_n, F integrierbar und sei f eine Funktion mit $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ fast überall (das heißt für alle x außerhalb einer Nullmege). Wenn $|f_n(x)| \leq F(x)$ fast überall, dann gilt: f ist integrierbar mit

$$\int f(x)dx = \lim_{k\to+\infty} \int f_n(x)dx \tag{6.38}$$

Beweis Wir definieren

$$g_k(x) \coloneqq \sup\{f_l(x) \colon l \geq k\} \in \overline{\mathbb{R}} \tag{6.39}$$
$$g_{k,r}(x) \coloneqq \max\{f_k(x), \ldots, f_{k+r}(x)\} \tag{6.40}$$

Es gilt:

$$\forall k, v, x,\ g_{k,v+1}(x) \geq g_{k,v}(x) \tag{6.41}$$

Das heißt $g_{k,v}$ ist in v monoton steigend.

$$\Rightarrow \lim_{r\to+\infty} g_{k,r} = g_k(x) \tag{6.42}$$
$$\forall\, k\colon |f_k(x)| \leq F(x) \Rightarrow g_{k,r}(x) \leq F(x)\, \forall\, k, r, x \tag{6.43}$$

(Bemerkung: f_k integrierbar $\Rightarrow g_{k,v}$ integrierbar.)
Aus Beppo Levi folgt:
$g_k = \lim_{v\to+\infty} g_{g_k,v}$ ist integrierbar mit:

$$\int g_k(x)dx = \lim_{r\to+\infty} \int g_{k,r}(x)dx \tag{6.44}$$

Nach Definiton der g_k gilt:

$$g_{k+1}(x) \leq g_k(x)\, \forall\, k, x \tag{6.45}$$
$$\Rightarrow -g_{k+1} \geq -g_k\, \forall\, k, x \tag{6.46}$$

Aus

$$|f(x)| \leq F(x)\, \forall\, k \tag{6.47}$$

folgt

$$-g_k(x) \leq F(x) \tag{6.48}$$

Aus Beppo Levi folgt:
$\lim_{k\to+\infty} g_k$ ist integrierbar mit

$$\int \lim_{k\to+\infty} g_k(x)dx = \lim_{k\to+\infty} \int g_k(x)dx \tag{6.49}$$

Hilfsbehauptung $\lim_{k\to+\infty} g_k(x) = f(x)$
<u>Fall 1:</u> $f(x) \neq +\infty$. Aus $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ folgt:

$$\begin{aligned} &\forall\,\varepsilon\,\exists\,N\colon\, f(x)-\varepsilon < f_k(x) < f(x)+\varepsilon\,\forall\,n \geq N && (6.50)\\ \Rightarrow\,&\forall\,\varepsilon\,\exists\,N\colon\, f(x)-\varepsilon < g_k(x) < f(x)+\varepsilon\,\forall\,n \geq N && (6.51)\\ \Rightarrow\,&\lim_{k\to+\infty} g_k = f(x) && (6.52)\end{aligned}$$

<u>Fall 2:</u> $f(x) = \infty$ (ähnlich)

<u>Also gilt:</u>

$$g_k = \sup\{f_k, f_k+1, \ldots\} \geq f_k \tag{6.53}$$

f ist integrierbar mit:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx = \lim_{k\to+\infty}\int g_k(x)dx \underset{(6.53)}{\geq} &= \limsup \int f_k(x)dx && (6.54)\\ \Rightarrow \int f(x)dx &\geq \limsup \int f_k(x)dx && (6.55)\end{aligned}$$

<u>Analog für $-f$ liefert:</u>

$$\int -f(x)dx \geq \limsup \int -f_k(x)dx \tag{6.56}$$

Jedoch

$$\begin{aligned} \limsup \int -f_k(x)dx &= -\liminf \int f_k(x)dx && (6.57)\\ \Rightarrow \int f(x)dx &\leq \liminf \int f_k(x)dx && (6.58)\end{aligned}$$

Aus

$$\liminf \int f_k(x)dx \geq \int f(x)dx \geq \limsup \int f_k(x)dx \tag{6.59}$$

folgt

$$\int f(x)dx = \lim_{k\to+\infty}\int f_k(x)dx \tag{6.60}$$

6.8.1 Beispiel, dass punktweise Konvergenz alleine nicht genügt

$$f_k(x) = \begin{cases} k, & \text{falls } 0 < x < \frac{1}{k} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{6.61}$$

Dann gilt:

$$\forall\, x\colon \lim_{k\to+\infty} f_k(x) = 0 \tag{6.62}$$

weil für $x > 0$ gilt:

$$\exists\, n \in \mathbb{N}\colon \frac{1}{n} < x \Rightarrow f_k(x) = 0 \,\forall\, k \geq n \tag{6.63}$$

$$\int f_k(x)dx = h\frac{1}{h} = 1 \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \int f_k(x)dx = 1 \neq 0 = \int f(x)dx \tag{6.64}$$

für $f(x) = \lim_{k\to+\infty} f_k(x)$. Was geht schief?

$$g_{1,3} = \max\{f_1, f_2, f_3\} \tag{6.65}$$

$$g_1 = \lim_{v\to+\infty} g_{1,v} \tag{6.66}$$

Damit g_1 integrierbar wäre, müsste

$$1(1 - \frac{1}{2}) + 2(\frac{1}{2} - 13) + \cdots \tag{6.67}$$

konvergieren. Aber

$$(6.67) = \sum_{k=1}^{\infty} k\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) \tag{6.68}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 1 - \frac{k}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \tag{6.69}$$

divergiert. Problem: g_1 ist hier nicht integrierbar (da $\nexists F$ integrierbar $|f_k(x)| \leq F(x) \,\forall\, k$.)

7 L^1-Halbnorm und Vollständigkeit

7.1 Definition einer Cauchyfolge

Sei f_k eine Folge von Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$.(f_k) ist eine Cauchyfolge, falls gilt:

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\, N\colon\; \forall\, m, r \geq N\colon \|f_m - f_r\|_1 \tag{7.1}$$

7.2 Satz von Fischer-Riesz über die L^1-Vollständigkeit

Sei f_k eine Folge von Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit $\|f_k\|_1 < \infty \,\forall\, k$. Sei (f_k) eine Cauchyfolge. Dann existiert eine Funktionen $g\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ so, dass

1. $$\lim_{k\to+\infty} \|f_k - g\|_1 = 0 \tag{7.2}$$

2. $$\|g\|_1 < +\infty \tag{7.3}$$

3. Es existiert eine Nullmenge N und eine Teilfolge (f_{k_l}) so, dass
$$\lim_{l\to+\infty} f_{k_l}(x) = g(x) \,\forall\, x \notin N \tag{7.4}$$

Beweis

Hilfsbehauptung Es gibt eine Teilfolge f_{k_l} so, dass gilt

$$\forall\, t, s \geq N\colon \|f_{k_l} - f_{k_s}\|_1 < \frac{1}{2^N} \tag{7.5}$$

Beweis der Hilfsbehauptung Nach Voraussetzung (Cauchyfolge) gilt:

$$\forall\, N\colon\ \exists\, M\colon \|f_m - f_r\|_1 < \frac{1}{2^n} \quad \forall\, m, r \geq M = M(N) \tag{7.6}$$

Wähle die Teilfolge als $f_{M(1)}, f_{M(2)}, \ldots$ das heißt f_{k_l} mit $k_l = M(l)$. Also $f_{k_l} = f_{M(l)}$. Daraus folgt

$$\forall\, N\colon\ \forall\, t \geq N\colon\ \forall\, s \geq N \|f_{k_t} - f_{k_s}\|_1 \tag{7.7}$$

HB

Wir setzten nun $g_l = f_{k_{l+1}} - f_{k_l}$. Dann gilt aus (7.7) mit $t = M, s = N + 1 = t + 1$:

$$\|g_l\|_1 = \|f_{k_{l+1}} - f_{k_l}\|_1 < \frac{1}{2^l} \tag{7.8}$$

Nach der verallgemeinerten Dreiecksungleichung folgt:

$$\|\sum_{l\in\mathbb{N}} |g_l|\|_1 \leq \sum_{l\in\mathbb{N}} \|g_l\|_1 < \sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^l} = 1 \tag{7.9}$$

Insbesondere:

$$h(x) = \sum_{l\in\mathbb{N}} |g_l(x)| \text{ integrierbar } \Rightarrow \{x\colon h(x) = +\infty\} \text{ ist Nullmenge} \tag{7.10}$$

Wir setzen $N = \{x\colon h(x) = +\infty\}$. Für $x \notin N$ gilt:

$$\sum_{l\in\mathbb{N}} |g_l(x)| < +\infty \Rightarrow \sum_{l\in\mathbb{N}} g_l(x) \text{ absolut konvergent} \tag{7.11}$$

$$\Rightarrow g(x) := \begin{cases} f_k(x) + \sum_{l\geq 1} g_l(x), & \text{falls } x \in N \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{7.12}$$

Für $x \notin N$ gilt:

$$g(x) = \lim_{c\to+\infty} \left[\sum_{l=1}^{c} g_l(x)\right] + f_{k_1}(x) = \lim_{c\to+\infty} \left[\sum_{l=1}^{c} f_{k_{l+1}}(x) - f_{k_l}(x)\right] + f_{k_1}(x) \tag{7.13}$$

$$= \lim_{c\to+\infty} f_{k_{l+1}}(x) \Rightarrow 3. \tag{7.14}$$

<u>Es gilt</u>

$$g(x) - f_{k_{l+1}}(x) = \sum_{l>c} g_l(x) \tag{7.15}$$

$$\Rightarrow \|g - f_{k_{l+1}}\|_1 \leq \sum_{l>c} \|g_l(x)\|_1 < \sum_{l>c} \frac{1}{2^l} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j+c}} = \frac{1}{2^c} \tag{7.16}$$

Also:

$$\forall\, c \in \mathbb{N}\colon \|g - f_{k_l}\|_1 < \frac{1}{2^c} \tag{7.17}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann $\exists\, N\colon \frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Daraus folgt $\forall\, c \geq N$

$$\|g - f_{k_l}\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} \tag{7.18}$$

Anderseits $\forall\, m, r \geq M(N)$:

$$\|f_m - f_r\|_1 < \frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{7.19}$$

Da $k_N = M(N)$, folgt $\forall\, m \geq M(N)$:

$$\|f_m - g\|_1 \leq \underbrace{\|f_m - f_{M(N)}\|_1}_{<\frac{\varepsilon}{2}} - \underbrace{\|f_{M(N)} - g\|_1}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \tag{7.20}$$

das heißt

$$\lim_{m\to+\infty} \|f_m - g\|_1 = 0 \tag{7.21}$$

Also folgt die erste Aussage.
Nach Voraussetzung gilt $\exists\, k\colon \|f_k\|_1$ und $\|f_k - g\|_1 < \infty$. Daraus folgt:

$$\|g\|_1 = \|g - f_k + f_k\|_1 \leq \|g - f_k\|_1 + \|f_k\|_1 < \infty \tag{7.22}$$

Also folgt die zweite Aussage.

7.3 Erinnerung über die Norm eines Quotientenvektorraums

Fixiere $n \in \mathbb{N}$. Sei

$$A = \{f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}\colon \|f\|_1 < \infty\} \tag{7.23}$$

Dann ist der Quotientenvektorraum $\frac{A}{B}$ ein normierter Vektorraum mit Norm $f \mapsto \|f\|_1$.

7.4 Bemerkung

Weil

$$\int f(x)dx = \int g(x)dx \text{ falls } \{x\colon f(x) - g(X) \neq 0\} \tag{7.24}$$

eine Nullmenge ist, gilt: durch $f \mapsto \int f(x)dx$ erhalten wir eine lineare Abbildung $\frac{A}{B} \to \mathbb{R}$. Dies gilt, weil $B = \{f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} | \text{die Menge} \{x\colon f(x) \neq 0\} \forall\forall \text{ist eine Nullmenge}\}$ Nullmenge ist.

7.4.1 Folgerung aus dem Satz von Fischer-Riesz

$\frac{A}{B}$ ist ein vollständiger normierter Vektorraum.

7.4.2 Definition der L^1-Halbnorm von $\mathbb{R}^n$

$$L^1(\mathbb{R}^n) := \frac{A}{B} \tag{7.25}$$

7.4.3 Zusammenfassung

$$\frac{L^1(\mathbb{R}^n) = \{f\colon \|f\|_1 < +\infty\}}{\{f\colon \|f\|_1 = 0\}} \tag{7.26}$$

ist ein vollständig normierter Vektorraum und $f \mapsto \int f(x)dx$ definiert eine lineare Abbildung $L^1(\mathbb{R}^n) \to R$

7.5 Nachtrag zu Fischer-Riesz

: Wenn alle f_k integrierbar sind und $\lim_{k\to+\infty} \|f_k - g\|_1 = 0$ dann ist g integrierbar.

Beweis f_k integrierbar. Daraus folgt

$$\exists\, T_k\colon \|f_k - T_k\|_1 < \frac{1}{k} \tag{7.27}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle N so, dass

$$\forall\, k \geq N : \|f_n - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} \tag{7.28}$$

Wähle M so, dass

$$\frac{1}{2^M} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{7.29}$$

Also:

$$\forall\, k \geq \max\{N, M\} : \|T_k - g\|_1 \leq \|f_k - g\|_1 + \|T_k - f_k\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{7.30}$$

7.6 Satz: Modifizierter Beppo Levi

Sei $f_k : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine monoton steigende Folge integrierbarer Funktionen. Dann gilt:

1. Entweder ist $f(x) = \lim_{k\to+\infty} f_k(x)$ integrierbar, $\lim_{k\to+\infty}\|f - f_k\|_1 = 0$ und $\sup_k\|f_k\|_1 < +\infty$
2. Oder $\sup_k\|f_k\|_1 <= +\infty$ und $f(x) = \lim_{k\to+\infty}(x)$ ist nicht integrierbar.

Beweis: 2. Da f_k monoton steigend ist, gilt: Wir zerlegen $h(x) = (h^+ + h^-)(x)$für beliebige Funktionen h mit $h^{+,-} \geq 0$. Außerdem gilt: $f^- \leq f_k^-$ und $f^+ \geq f_k^+\ \forall\, k$ da f_k monoton steigend. Daher:

$$\|f\|_1 \leq \|f^+\|_1 + \|f^-\|_1 \tag{7.31}$$

$$\sup_k\|f_k\|_1 = +\infty \Rightarrow \sup_k\|f_k^+\|_1 = +\infty \tag{7.32}$$

weil

$$\|f_k^-\|_1 \leq \|f_1^-\|_1 \leq \|f\|_1 < \infty \tag{7.33}$$

Da $f^+ \geq f_k^+$ und (7.31) gilt folgt:

$$\|f\|_1 \geq \|f^+\|_1 \geq \sup_k\|f_k^+\|_1 = +\infty \tag{7.34}$$

und f ist nicht integrierbar.
1.

$$\sup\|f_k\|_1 < \infty \Rightarrow f \text{ integrierbar mit } \lim_{k\to+\infty}\|f_k - f\|_1 = 0 \tag{7.35}$$

Wir setzen

$$h_k := f_k + f_1^- \tag{7.36}$$

Dann gilt:

$$h_{k+1} \geq h_k\ \forall\, k \quad h_1 = f_1 + f_1^- = f_1^+ \geq 0 \tag{7.37}$$

Da

$$h_k(x) \geq 0\ \forall\, k\ \forall\, x \tag{7.38}$$

gilt, folgt

$$\int h_k(x)dx = \int |h_k(x)|dx = \|h_k\|_1 \tag{7.39}$$

Da h_k monoton steigend ist, gilt $\forall\, k > l$

$$\|h_k - h_l\|_1 = \int (h_k - h_l)(x)dx = \|h_k\|_1 - \|h_l\|_1, \text{ da } h_k \geq h_l \tag{7.40}$$

Sei

$$K = \sup \|h_k\|_1 < \infty \tag{7.41}$$

(weil $\sup \|f_k\|_1 < +\infty$ und $\|f_1^-\|_1 < +\infty$). Dann gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, m\colon \|h_m\|_1 \geq K - \varepsilon \text{ und } \|h_m\|_1 \leq K \tag{7.42}$$

Also gilt $\forall\, r \geq s \geq m\colon \quad h_r \geq h_s \geq h_m$

$$\Rightarrow K \geq \|h_r\|_1 \geq \|h_s\|_1 \geq \|h_m\|_1 \geq K - \varepsilon \tag{7.43}$$

$$\Rightarrow \|h_r - h_s\|_1 \leq \varepsilon, \text{ weil } \|h_r\|_1 = \|h_s\|_1 + \|h_r - h_s\|_1 \tag{7.44}$$

Das heißt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, m\colon\ \forall\, r, s \geq m\colon \|h_r - h_s\|_1 < \varepsilon \tag{7.45}$$

Also ist (h_k) eine L^1-Cauchyfolge. Nach dem Satz von Fischer-Riesz folgt:

$$\exists\, h\colon \lim_{k\to+\infty} \|h_k - h\|_1 = 0 \text{ und } \lim_{l\to+\infty} h_{k_l}(x) = h(x) \tag{7.46}$$

für eine geeignete Teilfolge und außerhalb einer Nullmenge N. Daraus folgt:

$$\forall\, \varepsilon\, \exists\, N\colon h_{k_l}(x) \geq h(x) - \varepsilon\ \forall\, l \geq N \tag{7.47}$$

$$\Rightarrow \forall\, \varepsilon\, \forall\, k \geq h_N\colon h_k(x) \geq h_{k_N}(x) \geq h(x) - \varepsilon \text{ weil } h_k \text{ monotn steigend} \tag{7.48}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} h_k(x) = h(x) \tag{7.49}$$

außerhalb einer Nullmenge N. Für

$$\tilde{h}(x) \coloneqq \lim_{k\to+\infty} h_k(x) \tag{7.50}$$

gilt also:

$$\{x\colon \tilde{h}(x) \neq h(x)\} \tag{7.51}$$

ist eine Nullmenge. Nach Fischer-Riesz gilt:

$$\lim_{k\to+\infty} \|h - h_k\|_1 = 0, h \tag{7.52}$$

integrierbar. Mit $\|\tilde{h} - h\|_1 = 0$ folgt:

$$\lim_{k \to +\infty} \|\tilde{h} - h_k\|_1 = 0 \tag{7.53}$$

$\tilde{h}$ integrierbar. Da $f_k = h_k - f_1^-$, folgt: Für

$$f(x) = \lim_{k \to +\infty} h_k(x) - f_1^-(x) \tag{7.54}$$

gilt

$$\lim_{k \to +\infty} f_k - f = 0, f \text{ integrierbar } \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} \int f_k(x) dx = \int f(x) dx \tag{7.55}$$

7.6.1 Folgerung

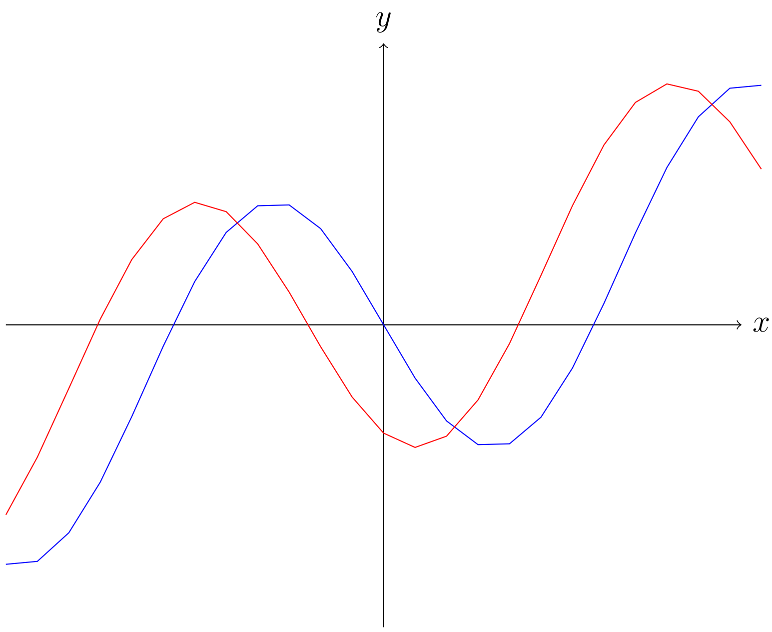
Sei f_k eine aufsteigende Folge integrierbarer Funktionen. Dann gilt: Entweder ist

$$\lim_{k \to +\infty} \int f_k(x) dx = +\infty \tag{7.56}$$

oder

$$f(x) = \lim_{k \to +\infty} f_k(x) \text{ ist integrierbar mit } \lim_{k \to +\infty} \int f_k(x) dx = \int f(x) dx \tag{7.57}$$

8 Translationsinvarianz des Integrals



8.1 Satz über die Translationsinvarianz des Integrals

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar, $v \in \mathbb{R}^n$

$$h(x) \coloneqq f(x+v) \tag{8.1}$$

Dann ist h integrierbar mit

$$\int h(x)dx = \int f(x)dx \tag{8.2}$$

Beweis Es existieren Treppenfunktionen T_k mit

$$\lim_{k\to+\infty} \|T_k - f\|_1 = 0 \tag{8.3}$$

Dann ist

$$\tilde{T}_k(x) = T_k(x+v)\colon \lim_{k\to+\infty} \|\tilde{T}_k - f\|_1 = 0 \tag{8.4}$$

9 Parameterabhängige Integrale

9.1 Satz über die partielle Differenzierbarkeit

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ stetig.

1. Wenn es eine integrierbare Funktion $h\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ gibt so, dass

   $$|f(x,y)| \leq h(x) x, y \tag{9.1}$$

   dann ist

   $$y \mapsto F(y) = \int f(x,y)dx \tag{9.2}$$

   stetig.

2. Wenn zusätzlich f nach y_i partiell differenzierbar ist und $\exists H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar mit

   $$\left|\frac{\delta f}{\delta x}(x,y)\right| \leq H(x) \,\forall\, x, y \tag{9.3}$$

   wobei $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Dann gilt: F ist partiell differenzierbar mit

   $$\frac{\partial F}{\partial y_i}(y) = \int \frac{\partial f}{\partial y_i}(x,y)dx \tag{9.4}$$

   Insbesondere ist $\frac{\delta f}{\delta y_i}(x,y)$ ist integrierbar.

Beweis Bemerkung: Da h integrierbar und $|f(x,y)| \leq h(x)$, gilt $\forall y\colon x \mapsto f(x,y)$ ist integrierbar.
Seien $y \in \mathbb{R}^m$ fest gewählt, y_k eine Folge in $\mathbb{R}^m$ mit $\lim_{k\to+\infty} y_k = y$.
Zu zeigen: $F(y) = \lim_{k\to+\infty} F(y_k)$.
Wir setzen:

$$g(x) = f(x,y) \quad g_k(x) = f(x,y_k) \tag{9.5}$$

Es gilt:

$$\forall\, x\colon \lim_{k\to+\infty} g_k(x) = g(x) \text{ weil } f \text{ stetig ist und } y_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} y \tag{9.6}$$

$$|g_k(x)| \leq h(x)\;\forall\, h, x \tag{9.7}$$

Wir können Lebesgue anwenden und erhalten:

$$\lim_{k\to+\infty} \int g_k(x)dx = \int g(x)dx \Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty} F(y_k) = F(y) \tag{9.8}$$

Zu 2): Betrachte

$$\frac{F(y+he_i) - F(y)}{h} \tag{9.9}$$

wobei e_i der i-te Einheitsvektor ist.

$$\frac{F(y+he_i) - F(y)}{h} = \int \frac{f(x,y+he_i) - f(x,y)}{h} dx = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\xi e_i)dx \tag{9.10}$$

wobei $\xi \in [0,h]$ und ξ von x,y abhängt. Fixiere $h_k \to 0$. Setze

$$\varphi_k(x) = \frac{f(x,y+h_k e_i) - f(x,y)}{h_k} \tag{9.11}$$

Es gilt

$$|\varphi_k(x)| \leq \sup_y \left|\frac{\partial f}{\partial y_i}(x,y)\right| \leq H(x) \tag{9.12}$$

Aus Lebesgue folgt

$$\lim_{k\to+\infty} \int \varphi_k(x)dx = \int \lim_{k\to+\infty} \varphi_k(x)dx = \int \frac{\partial f}{\partial y_i}(x,y)dx \tag{9.13}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \int \varphi_k(x)dx = \lim_{k\to+\infty} \frac{F(x,y+he_i) - F(y)}{h_k} = \frac{\partial F}{\partial y_i}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y_i} \int f(x,y)dx \tag{9.14}$$

9.1.1 Bemerkung

Stetigkeit beziehungsweise Differenzierbarkeit wird nur in y-Richtung benötigt. Wir können also die Bedingung "f stetig" abschwächen zu "f ist überall in y stetig".

9.2 Satz über die partielle Integrierbarkeit und Stetigkeit des partiellen Integrals

Seien $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $G \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f\colon X \times G \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann gilt:

$$\forall y \in G \,\text{ist}\, x \mapsto f(x,y) \tag{9.15}$$

integrierbar und

$$F(y) = \int\limits_X f(x,y)dx \tag{9.16}$$

ist stetig.

Beweis Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft. Fixiere $y_0 \in G$. Aus G offen folgt

$$\exists\, c > 0\colon B \coloneqq \{v \in \mathbb{R}^m\colon \|v - x_0\|_\infty < c\} \subset G \,\text{kompakt.} \tag{9.17}$$

Aus der Kompakheit von B folgt, dass $X \times B$ kompakt ist und daraus folgt, dass $|f|$ auf $X \times B$ ein Maximum an. Daraus folgt wiederum:

$$\exists\, M\colon |f(x,y)| \leq M \,\forall\, x \in X, y \in B \tag{9.18}$$

$$\Rightarrow |f(x,y)| \leq M \cdot \chi_X(x) \,\forall\, x \in X, y \in B \tag{9.19}$$

Also:
$h = M\chi_X$ ist integrierbar mit

$$|f(x,y)| \leq h(x) \,\forall\, x, y \tag{9.20}$$

Also ist F stetig.

Analog zeigt man:

9.3 Satz über die Differenzierbarkeit des partiellen Integrals

Seien $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $G \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f\colon X \times G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist

$$F(y) = \int\limits_G f(x,y)dx \tag{9.21}$$

auch differenzierbar und

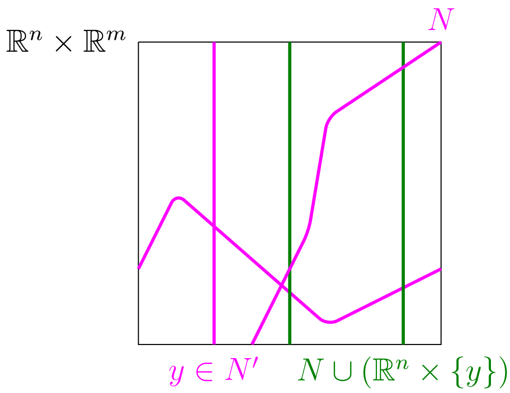
$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = \int \frac{\partial f}{\partial y_i}(x,y)dx \tag{9.22}$$

9.3.1 Merkregel

Integration über kompkate Mengen schadet weder der Stetigkeit noch der Differenzierbarkeit.

10 Allgemeiner Fubini

10.1 Satz von Fubini für Nullmengen



Sei $N \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ eine Nullmenge. Dann exsistiert eine Nullmenge $N' \subset \mathbb{R}^m$ so, dass $\forall y \in \mathbb{R}^m \setminus N'$ gilt: $N \cap \{\mathbb{R}^n \times \{y\}\}$ ist eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n \times \{y\} = \mathbb{R}^n$. Für $y \in \mathbb{R}^m$ setze

$$N_y = \{x \in \mathbb{R}^n \colon (x, y) \in N\} \tag{10.1}$$

$\forall y \notin N'$ gilt: N_y ist eine Nullmenge und $N_y \subset \mathbb{R}^n$.
<u>Insbesondere:</u>

$$\int \chi_N d(x, y) = 0 = \int \underbrace{\int \chi_{N_y}(x) dx dy}_{=0\,\forall\, y \notin N'} \tag{10.2}$$

Beweis

$$N \text{ Nullmenge } \Leftrightarrow \|\chi_N\|_1 = 0 \tag{10.3}$$

$$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k \text{ Hüllreihe mit} \tag{10.4}$$

$$\chi_N(x, y) \leq \sum_{k=1}^{\infty} T_k(x, y)\, \forall\, x, \forall y \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} \int T_k(x, y) d(x, y) < \varepsilon \tag{10.5}$$

mit

$$T_k = c_k \chi_{Q_k \times Q'_k} \tag{10.6}$$

mit $c_k > 0, Q_k$ Quader in $\mathbb{R}^n, Q'_k$ Quader in $\mathbb{R}^m$. Für festes $y \in \mathbb{R}^m$ betrachten wir

$$S_{k,y}(x) = T_k(x, y) = c_k \chi_{Q_k}(x) \chi'_{Q_k}(y) \tag{10.7}$$

Ausserdem betrachten wir:

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} S_{k,y}(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathrm{Vol}(Q_k) \cdot \chi_{Q'_k}(y) \tag{10.8}$$

$$\|\varphi\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathrm{Vol}(Q_k)\mathrm{Vol}(Q'_k) < \varepsilon \tag{10.9}$$

gilt nach Vorraussetzung für alle $\varepsilon > 0$. Also:

$$\|\varphi\|_1 < \varepsilon \,\forall\, \varepsilon > 0 \Rightarrow \|\varphi\|_1 = 0 \tag{10.10}$$

$$\Rightarrow\ \exists\, N' \text{ Nullmege so, dass } \varphi(y) = 0 \,\forall\, y \notin N' \tag{10.11}$$

$$\varphi(y) = 0 \Rightarrow N_y \tag{10.12}$$

ist eine Nullmege

10.2 Satz von Fubini (allgemeine Version)

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^m$ so, dass für alle $y \in \mathbb{R}^m \setminus N$ gilt: Die durch $f_y(x) = f(x,y)$ definierte Funktion $f_y\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ ist integrierbar und

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(x,y)d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f_y(x)dxdy \tag{10.13}$$

Beweis Bekannt: Fubini gilt für Treppenfunktionen.
Sei $F\colon X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar mit $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m$. Aus der Integrierbarkeit von F folgt, dass es Treppenfunktionen T_k gibt mit

$$\lim_{k\to+\infty} \|T_k - f = 0\|_1 \tag{10.14}$$

Daraus folgt wiederum, dass die T_k eine L^1-Cauchyfolge bilden. Also können wir o.B.d.A. aus dem Satz von Fischer-Riesz folgern, dass für fast alle (x,y) gilt:

$$\lim_{k\to+\infty} T_k(x,y) = F(x,y) \tag{10.15}$$

Wiederum kann man durch den Übergang zu einer Teilfolge o.B.d.A. folgern, dass:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|T_{k+1} - T_k\|_1 < \infty \tag{10.16}$$

Es existiert eine Nullmenge N mit:

$$N \subset X \times Y\colon\ \forall\, (x,y) \notin N\colon \lim_{k\to+\infty} T_k(x,y) = F(x,y) \tag{10.17}$$

$$\xRightarrow{N \text{ Nullmenge}} \text{ für fast alle } y \in Y \text{ ist } \{x \in X\colon (x,y) \in N\} \tag{10.18}$$

eine Nullmenge in X, das heißt $\exists N_1 \subset Y$ Nullmenge mit:

$$\forall\, y \notin N \colon T_k(x,y) \to F(x,y) \tag{10.19}$$

für fast alle $x \in X$. Wir setzten

$$H_0 = |T_1| \text{ und } H_k = |T_{k+1} - T_k| \,\forall\, k \geq 1 \tag{10.20}$$

Dann gilt unter iterierter Anwendung der Dreiecksungleichung

$$|T_k| \leq \sum_{l<k} H_l \,\forall\, k \in \mathbb{N} \tag{10.21}$$

Also:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|T_{k+1} - T_k\|_1 < +\infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \|H_k\|_1 < +\infty \tag{10.22}$$

Nach dem Satz von Beppo Levi konvergiert deshalb $\sum_{k=1}^{\infty} H_k$ zu einer integrierbaren Funktion $H \colon X \times Y \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ mit:

$$h_k(y) = \int H_k(x,y)dx \tag{10.23}$$

H_k ist integrierbar, da H_k eine Treppenfunktion ist. Also:

$$\Rightarrow \int H_k(y)dy = \iint H_k(x,y)dxdy = \int H_k(x,y)d(x,y) = \|H\|_1 \tag{10.24}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \int h_k(y)dy = \sum_{k=1}^{\infty} \|h_k\|_1 < +\infty \tag{10.25}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} h_k = h \text{ definiert intergrierbare Funktion } h \colon Y \to \overline{\mathbb{R}} \tag{10.26}$$

$$\Rightarrow h(y) < +\infty \text{ für fast alle } y \tag{10.27}$$

Das heißt, für alle y mit $h(y) = +\infty$ gilt:

$$\{y \colon h(y) = +\infty\} \text{ ist Nullmenge} \tag{10.28}$$

Also gilt für fast alle y und alle k mit $X_y = X \times \{y\} \subset X \times Y$:

$$\int\limits_{X_y} |T_k(x,y)|dx \leq \int\limits_{X_y} \sum_{l \leq k} H_l(x,y)dy \leq \sum_{l \leq k} h_l(y) \leq h(y) < +\infty \tag{10.29}$$

Für fast alle y gilt nun:

$$T_k(x,y) \mapsto F(x,y) \tag{10.30}$$

für fast alle x und

$$\int\limits_{X_y} |T_k(x,y)|dx = \|T_k\|_{1,X_y} \leq h(y) < +\infty \tag{10.31}$$

Zudem gilt:

$$|T_k(x,y)| \leq \sum_{l\leq k} H_l(x,y) \leq H(x,y) \text{ mit } H = \sum_{l=1}^{\infty} H_l \tag{10.32}$$

Also gilt wiederum für fast alle y: $T_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} f$ fast überall punktweise auf $X_y = X \times \{y\}$. Außerdem:

$$|T_k| \leq H \text{ mit } \|H\|_1 = h(y) < +\infty \Leftrightarrow H \text{ integrierbar} \tag{10.33}$$

Daher folgt aus dem Satz von Lebesgue:

$$S_k(y) \coloneqq \lim_{k\to+\infty} \int\limits_{X_y} T_k(x,y)dx = \int\limits_{X_y} f(x,y)dx =: g(y) \tag{10.34}$$

Wir haben

$$\lim_{k\to+\infty} S_k(y) = g(y) \tag{10.35}$$

für fast alle $y \in Y$.

$$|S_k(y)| \leq \int\limits_{X_y} |T_k(x,y)|dx \leq \sum_{l\leq k} H_l(x,y)dx \tag{10.36}$$

Da

$$\iint H_l(x,y)dxdy = \int H_l(x,y)d(x,y) \tag{10.37}$$

gilt:

$$\int\limits_{y}\int\limits_{X_y} \sum_{l\leq k} H_l(x,y)dxdy = \int \sum_{l\leq k} H_l(x,y)d(x,y) = \sum_{l\leq k} \|H_l\|_1 \leq \sum_{l=0}^{\infty} \|H_l\|_1 < +\infty \tag{10.38}$$

Mit Beppo Levi folgt:

$$y \mapsto \int\limits_{X_y} \sum_{l=0}^{\infty} H_l(x,y)dx =: \varphi(y) \tag{10.39}$$

ist integrierbar, also existiert ein integrierbares φ mit $|S_k| \leq \varphi \,\forall\, k$ und $S_k \mapsto g$ fast überall gilt. Nun können wir erneut des Satz von Lebesgue anwenden:

$$\lim_{k\to+\infty} \int S_k(y)dy = \int g(y)dy \tag{10.40}$$

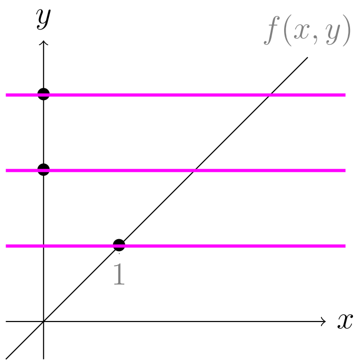
Damit haben wir gezeigt, dass:

$$\iint F(x,y)dxdy = \int g(y)dy = \lim_{k\to+\infty} \int S_k(y)dy = \lim_{k\to+\infty} \iint T_k(x,y)dxdy \tag{10.41}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \int T_k(x,y)d(x,y) \text{ (weil Fubini für T'fkt. gilt)} \tag{10.42}$$

$$= \int F(x,y)d(x,y) \text{ weil } \lim_{k\to+\infty} \|T_k - F\|_1 = 0 \tag{10.43}$$

10.2.1 Beispiel für die Notwendigkeit der Nullmenge



Für $S = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ und

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } y = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{10.44}$$

gilt: S ist Nullmenge, insbesondere ist χ_S integrierbar, da $\forall \varepsilon > 0$ gilt. Die Hüllreihe für S ist gegeben durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{]-\delta,\delta[\times]-n,n[} \text{ mit } \delta = \frac{\varepsilon}{n2^n} \tag{10.45}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int \chi_{]-\delta,\delta[\times]-n,n[} dx = \varepsilon \,\forall\, \varepsilon > 0 \Rightarrow \|\chi_S\|_1 = 0 \tag{10.46}$$

Wir müssen $N = \{y \colon y = 0\}$ setzten, denn es gilt:

$$S_y = \{x \colon (x,y) \in S\} = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{falls } y = 0 \\ \{\}, & \text{falls } y \neq 0 \end{cases} \tag{10.47}$$

daraus folgt χ_{S_y} ist für für $y \neq 0$ integrierbar.

10.2.2 Merkregel

Niederdimensionale Mengen sind Nullmengen, dass heißt wenn $\mathbb{R}^n \subsetneq \mathbb{R}^m$, dann ist $\mathbb{R}^n$ Nullmenge in $\mathbb{R}^m$.

11 Transformationsformel

Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F\colon G \to U$ Diffeomorphismus.

11.1 Definition eines Diffeomorphismus

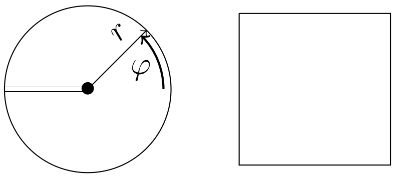
F heißt Diffeomorphismus, falls gilt:

1. F ist bijektiv
2. F^{-1} ist differenzierbar

11.2 Transformationsformel

$$\int\limits_{F(G)} f(x)dx = \int\limits_{G} (f \circ F)(y)|\det(DF)|dy \tag{11.1}$$

11.3 Beispiel (Kreisscheibe)



Ein Punkt in Polarkoordinaten wird dargestellt durch seinen Abstand vom Ursprung r und dem Winkel zum Horizont φ. Genauer:

$$(r, \varphi) \in G = \{(r, \varphi)\colon 0 < r < 1, -\pi < \varphi < \pi\} \tag{11.2}$$

Wir transformieren die Punkte im Quadrat zu den Punkten in der Kreisscheibe wobei:

$$F(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in U = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(x, 0)\colon x \leq 0\} \tag{11.3}$$

Sei also

$$(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \tag{11.4}$$

Da

$$\cos^2 + \sin^2 = 1 \tag{11.5}$$

folgt

$$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2} \tag{11.6}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi \Rightarrow \varphi = \arctan\Big(\frac{y}{x}\Big) \tag{11.7}$$

<u>Flächeninhalt der Kreisscheibe:</u>

$$\int \chi_G(x)dx = \int\limits_G 1dx = \int\limits_{F(G)} 1dx = \int\limits_G 1|\det(DF)|dy \tag{11.8}$$

wobei $F = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial r} & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial F_2}{\partial r} & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{11.9}$$

$$|\det(DF)| = |\cos\varphi r\cos\varphi - (-r\sin\varphi)\sin\varphi| = r \tag{11.10}$$

$$\text{Flächeninhalt(Kreisscheibe)} = \int\limits_G rd(r,\varphi) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_0^1 rdrd\varphi = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}d\varphi = \pi \tag{11.11}$$

11.4 Lemma über das Volumen eines Quaders unter einer linearen Abbildung

Sei Q ein Quader und $F \in GL(n,\mathbb{R})\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$\mathrm{Vol}(F(Q)) = |\det F|\mathrm{Vol}(Q) \tag{11.12}$$

11.4.1 Fakt aus der Linearen Algebra

Die Gruppe $GL(n,\mathbb{R})$ wird von den Elementarmatrizen (Streckungs- bzw Stauchungsmatrizen (Typ 1), Permutationsmatrizen (Typ 2) und Zeilenersetzungsmatrizen (Typ 3)) erzeugt.

$$EM_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & & \lambda & & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.13}$$

$$EM_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.14}$$

$$EM_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & t & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.15}$$

Sei $B \in GL(n, \mathbb{R})$ Setzte $A = B^{-1}$ mithilfe des Gaußverfahrens finden sich Elementarmatrizen so, dass

$$\prod_{k=S}^{1} E_k A = I \tag{11.16}$$

wobei I die Einheitsmatrix ist. Dass heißt, dass

$$\prod_{k=S}^{1} E_k = B \tag{11.17}$$

gilt, also wird die Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ von der Menge der Elementarmatrizen erzeugt.

Hilfsbehauptung Das Lemma gilt, wenn F durch eine Elementarmatrix gegeben ist.
Beweis der Hilfsbehauptung: Sei

$$Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \tag{11.18}$$

$$\mathrm{Vol}(Q) = \prod_{i=1}^{n} |b_i - a_i| \tag{11.19}$$

Elementarmatrizen erster Art:

$$\exists\, k, \lambda \in \mathbb{R}^* : F_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j \\ \lambda, & \text{falls } i = j = k \\ 1, & \text{falls } i = j \neq k \end{cases} \tag{11.20}$$

$$\mathrm{Vol}(F(Q)) = |b_1 - a_1| \cdots |\lambda b_k - \lambda a_k| \cdots |b_n - a_n| = |\lambda| \mathrm{Vol}(Q) \tag{11.21}$$

Elementarmatrizen zweiter Art:

$$EM_2, \Rightarrow\ \forall\, k, l \colon F_{ii} = 1 \Leftrightarrow i \in \{k, l\}, F_{k,l} = F_{l,k} = 1, 0 \,\text{sonst} \tag{11.22}$$

$$\mathrm{Vol}(F(Q)) = \mathrm{Vol}(Q) \tag{11.23}$$

da nur die Reihenfolge der Koordinaten vertauscht wird und $|\det F| = 1$.

11.5 Satz über die Invarianz des Integrals unter einer linearen Funktion

Sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $\varphi(x) = Ax + b$ mit $A \in M(n, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$f \circ \varphi \text{ ist integrierbar und} \tag{11.24}$$

$$\int f(x)dx = \int f \circ \varphi(x) dx |det A| \tag{11.25}$$

Beweis

1. Erinnerung an die Translationsinvarianz, das heißt obige Aussage gilt für $A = I_n$ also:

$$\int f(x)dx = \int f(x+b)dx \tag{11.26}$$

2. Sei $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^m, x = (y, z)$ mit $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ Hilfsbehauptung 1: Es gilt:

$$\int f(x)dx = \int f(y,z)d(y,z) = \int f(y + \alpha(z), z)d(y,z) \tag{11.27}$$

wobei $\forall\, \alpha \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ gilt α linear.
Beweis der ersten Hilfsbehauptung: Aus Fubini folgt:

$$\int f(y,z)d(y,z) = \iint f(y,z)dydz \tag{11.28}$$

Aus der Translationsinvarianz folgt nun $\forall\, z, b$:

$$\int f(y,z)dy = \int f(y+b, z)dy \tag{11.29}$$

$$\Rightarrow \forall\, z \int f(y,z)dy = \int f(y + \alpha(z), z)dy \tag{11.30}$$

$$\Rightarrow \iint f(y,z)dydz = \iint f(y + \alpha(z), z)dydz \tag{11.31}$$

was nach Fubini äquivalent zu

$$\int f(y,z)d(y,z) = \int f(y+\alpha(z),z)d(y,z) \tag{11.32}$$

ist.

$(y,z) \mapsto (y+\alpha(z),z)$ ist für lineares α eine lineare Abbildung die durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} I_k & \alpha_{k\times m} \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \tag{11.33}$$

Aus der Behaupung folgt somit die Formel für Elemetarmatrizen der 3. Art ((11.15)).

3. Aus Fubini folgt:

$$\iint f(y,z)dydz = \iint f(y,z)dzdy \tag{11.34}$$

also ändert sich das Integral nicht, wenn wir die Reihenfolge der Koordinaten ändern, das heißt es ist invariant unter Anwendung von Elementarmatrizen der 2. Art.

4. Aus dem Gaußverfahren folgt $\forall A \in GL(n,\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0\dots & 0 \\ 0\vdots & \ddots & 0\dots\vdots \\ 0 & 0\dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot E_1 \cdots E_s \tag{11.35}$$

wobei E_i Elementarmatrien der 2. oder 3. Art sind. Daraus folgt $B \in GL(n,\mathbb{R})$ mit $B = A^{-1}$ ist

$$B = (E_1 \cdots E_s) \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0\dots & 0 \\ 0\vdots & \ddots & 0\dots\vdots \\ 0 & 0\dots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} \tag{11.36}$$

5. Wenn Q ein Quader mit Seitenlängen $d_1,\dots,d_n$ ist und

$$\varphi\colon (x_1,\dots,x_n) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0\dots\vdots & 0 \\ 0\vdots\dots & \ddots & 0\dots\vdots \\ 0 & 0\dots\vdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 x_1,\dots,\lambda_n x_n) \tag{11.37}$$

dann ist $\varphi(Q)$ ein Quader mit Seitenlängen $|\lambda_1 d_1|,\dots,|\lambda_n d_n|$. Also

$$\mathrm{Vol}(\varphi(Q)) = |\lambda_1 \cdots \lambda_n| \cdot \mathrm{Vol}(Q) \tag{11.38}$$

6. Hilfsbehauptung 2:
   Dann ist auch $\varphi(N)$ eine Nullmenge.
   Bemerkung:
   Dies ist ein Spezialfall des Satzes für den Fall, bei dem $f = \chi_N$ ist. Dann sagt der Satz:

$$0 = \mathrm{Vol}(N) = \int f(x)dx = \int f \circ \varphi(x)dx|\det(A)| = \int \chi_{\varphi(N)}(x)dx|\det(A)| \quad (11.39)$$
$$\Rightarrow \mathrm{Vol}(\varphi(N)) = 0 \quad (11.40)$$

   Beweis der zweiten Hilfsbehauptung
   Aus N Nullmenge folgt $\forall \varepsilon > 0$:

$$\exists \text{ Quader } Q_k, c_k > 0\colon \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{Q_k} > \chi_N \text{ und} \quad (11.41)$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathrm{Vol}(Q_k) < \varepsilon \quad (11.42)$$

   Weil A in Elementarmatrizen zerlegbar ist folgt:

$$\mathrm{Vol}(Q_k)|\det(A)| = \mathrm{Vol}(\varphi(Q_k)) \quad (11.43)$$

   Das heißt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{\varphi(Q_k)} > \chi_{\varphi(N)} \text{ mit} \quad (11.44)$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{\varphi(Q_k)} = \sum_{k=1}^{\infty} |\det(A)| c_k \chi_{Q_k} < |\det(A)|\varepsilon \quad (11.45)$$
$$\Rightarrow \ \forall\, \varepsilon' > 0 \text{ mit } \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|\det(A)|}, Q'_k = \varphi(Q_k) \quad (11.46)$$

   Das heißt $\varphi(N)$ ist eine Nullmenge.

7. Für jede Elementarmatrix E und jeden Quader Q gilt für $\varphi(x) = Ex$:

$$\int \chi_Q(x)dx = |\det(E)| = \int \chi_{\varphi(Q)}(x)dx \quad (11.47)$$

   Beachte hierbei, dass für Elementarmatrizen der 2. und 3. Art gilt $|\det E| = 1$.

8.

$$\chi_\varphi(Q)(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \varphi(Q) \Leftrightarrow \varphi^{-1}(x) \in Q \quad (11.48)$$
$$\Rightarrow \chi_{\varphi(Q)(x)} = \chi_Q \circ \varphi^{-1} \quad (11.49)$$

9. Wegen Linearität folgt die entsprechende Aussage für Treppenfunktionen.

10. Sei f integrierbar und $\varphi(x) = Ex$. Wähle eine Folge von Treppenfunktionen T_k mit $\lim_{k\to+\infty}\|f - T_k\|_1 = 0$. Dann gilt:

$$\int f(x)dx = \lim_{k\to+\infty}\int T_k(x)dx \overset{9.}{=} \lim_{k\to+\infty}\int(T_k\circ\varphi)(x)dx|\det(E)| \tag{11.50}$$

Nun gilt: T_k ist L^1-Cauchyfolge. Da $T_k - T_l$ wieder eine Treppenfunktion ist, gilt

$$\|T_k - T_l\|_1 = \int|T_k - T_l|dx = |\det(E)|\int(T_k\circ\varphi) - (T_l\circ\varphi)dx \tag{11.51}$$

Also ist $T_k\circ\varphi$ auch eine L^1-Cauchyfolge.
Mit Fischer-Riesz folgt: Es gilt o.B.d.A.: $\lim_{k\to+\infty} T_k = f(x)$ außerhalb einer Nullmenge N. Also folgt:

$$\lim_{k\to+\infty}(T_k\circ\varphi)(x) = (f\circ\varphi)(x)\ \forall\, x\notin\varphi(N) \tag{11.52}$$

Da $\varphi(N)$ Nullmenge ist (6), folgt fast überall:

$$\lim_{k\to+\infty} T_k\circ\varphi = f\circ\varphi \tag{11.53}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty}\int T_k\circ\varphi(x)dx = \int f\circ\varphi(x)dx \tag{11.54}$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \int f\circ\varphi(x)dx|\det(E)| \tag{11.55}$$

11. Hilfsbehauptung 3: Seien A, B Matrizen für die die Transformationformel gilt. Dann gilt sie auch für $A\cdot B$.
Beweis der dritten Hilfsbehauptung

$$\varphi_A(x) = Ax \quad \varphi_B(x) = Bx \tag{11.56}$$

$$\int f(x)dx = \int(f\circ\varphi_A)(x)dx|\det(A)| \tag{11.57}$$

$$= \int(f\circ\varphi_A\circ\varphi_B)(x)dx|\det A\cdot\det B| \tag{11.58}$$

$$= \int(f\circ\varphi_{AB}(x)dx|\det AB|) \tag{11.59}$$

HB

12. Da Elementarmatrizen $GL(n,\mathbb{R})$ erzeugen, folgt der Satz.

11.5.1 Beispiel

$$f(x) = \chi_{[0,1]^n} \quad \varphi(x) = 2x \tag{11.60}$$

dann ist

$$\int f(x)dx = 1 \text{ und } \int (f \circ \varphi)(x)dx = \int f(2x)dx = \int_{2x\in[0,1]^n} 1dx = \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{11.61}$$

$$\int (f \circ \varphi)(x)dx \cdot |\det \varphi(E_1)| = \int (f \circ \varphi)(x)dx \cdot \left| \det \begin{pmatrix} 2 & 0\ldots\vdots & 0 \\ 0\vdots\ldots & \ddots & 0\ldots\vdots \\ 0 & 0\ldots\vdots & 2 \end{pmatrix} \right| \tag{11.62}$$

$$= \frac{2^n}{2^n} = 1 \tag{11.63}$$

11.5.2 Bemerkung

Sei $A \in GL(n, \mathbb{R})$ mit $\det A = 0, \varphi(x)Ax$. Dann gilt: Das Bild von φ ist eine Nullmenge.

1. Sei $V = \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{k+n}$. Dann ist V eine Nullmenge. Wegen Fubini gilt:

$$\int \chi_V d(x_1, \ldots, x_{k+n}) = \int \underbrace{\int \chi_V d(x_{k+1}, \ldots, x_{k+n})}_{=0} d(x_1, \ldots, x_k) = 0 \tag{11.64}$$

2.

$$\forall\, A \in GL(n, \mathbb{R}) \text{ gilt } V \text{ ist Nullmenge} \tag{11.65}$$

Also ist $\varphi_A(v)$ ist Nullmenge für $\varphi_A(x) = Ax$. Deshalb gilt, dass $W \subset \mathbb{R}^n$ Untervektoraum ist mit $\dim W < n$. Daraus folgt, dass W Nullmenge ist und daraus folgt wiederum das das Bild von φ_A Nullmenge für $\det A = 0$ ist.

11.5.3 Folgerung

Sei φ eine Drehung im $\mathbb{R}^3$, $K \subset \mathbb{R}^3$ kompakt. Dann gilt, dass das Volumen von K gleich dem Volumen von $\varphi(K)$ ist.

Beweis Drehungen werden durch orthogonale Matrizen beschrieben, also durch $A \in GL(n, \mathbb{R})$ mit $A \cdot A^T = I$. Daraus folgt $\det(A)^2 = 1$ weil $\det(A^t) = \det(A)$. Also folgt: $|\det(A)| = 1$

11.6 Satz über die Übertragbarkeit der Nullmengeneigenschaft aus offenen Mengen

Sei $N \subset \mathbb{R}^n$ Nullmenge, $N \subset G \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi\colon G \to W \subset \mathbb{R}^k$, G offen und φ Diffeomorphismus. Dann gilt, dass $\varphi(N)$ ist Nullmenge.

Beweis Es genügt zu zeigen, das für alle $p \in G$ eine offene Umgebung $U(p)$ so existiert, dass $\varphi(U(p) \cap N)$ eine Nullmenge ist. Dies genügt, da für eine Familie von offenen Mengen$(U_\alpha), \alpha \in I$ mit

$$\bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha = G \tag{11.66}$$

gilt, dass eine abzählbare Teilfamilie mit der selben Eigenschaft existiert. Falls die Indexmenge I abzählbar und $\varphi(U_\alpha \cap N)$ Nullmenge für alle α ist, dann gilt:

$$\int \chi_{\varphi(N)}(x)dx \leq \sum_{\alpha=1}^{\infty} \int \chi_{\varphi(U_\alpha \cap N)}(x)dx = 0 \tag{11.67}$$

Und daraus folgt die Nullmengeneigenschaft für $\varphi(N)$.

11.6.1 Merkregel für die Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen

Die Vereinigung von abzählbar vielen Nullmenge ist eine Nullmenge. Warum kann man U_α finden? Wähle U_α mit $\overline{U_\alpha}$ kompakt und $\overline{U_\alpha} \subset G$

$$\overline{U_\alpha} \text{ kompakt } \Rightarrow \max_{i,j;x \in \overline{U_\alpha}} |\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}(x)| \leq M \tag{11.68}$$

$$\Rightarrow \|\varphi(v) - \varphi(w)\|_\infty \leq M\|v - w\|_\infty \, \forall \, v, w \in \overline{U_\alpha} \tag{11.69}$$

Also gilt für jeden Quader $Q \subset U_\alpha$:

$$\mathrm{Vol}(\varphi(Q)) \leq M^n \mathrm{Vol}(Q) \tag{11.70}$$

Wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{Q_k}(x) \geq \chi_{U_\alpha \cap N} \text{ und} \tag{11.71}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathrm{Vol}(Q_k) < \varepsilon \tag{11.72}$$

Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{\varphi(Q_k)}(x) \geq \chi_{\varphi(U_\alpha \cap N)} \tag{11.73}$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathrm{Vol}(\varphi(Q_k)) < M^n \varepsilon \tag{11.74}$$

Also ist $\varphi(E_\alpha \cup N)$ Nullmenge.

11.7 Transformationsformel im Speziallfall dim=1

Aus Analysis II bekannt:
Substitutionsregel ($t = \varphi(x)$)

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt \tag{11.75}$$

Transformationsformel sagt aus:

$$\int_G f(\varphi(x))|\det D\varphi(x)|dx = \int_U f(y)dy \tag{11.76}$$

$(D\varphi)(x)$ ist eine $n \times m$-Matrix, hier also 1×1. Es gilt:

$$\det(D\varphi)(x) = \varphi'(x) \tag{11.77}$$

weil $\det(p) = p$ für $p \in \mathbb{R}, (p) \in M(1, \mathbb{R})$ Für $b > a$ gilt:

$$\int_a^b \cdots = \int_{[a,b]} \cdots \tag{11.78}$$

Für $b < a$ gilt:

$$\int_a^b \cdots = -\int_b^a \cdots = -\int_{[a,b]} \cdots \tag{11.79}$$

Fall 1: $\varphi'(x) > 0$
Fall 2: $\varphi'(x) < 0 \Rightarrow \varphi$ monoton fallend. Daraus folgt, dass wenn $a < b$ ist, dann $\varphi(a) > \varphi(b)$ gilt und Für $a < b$ gilt:

$$\int_a^b = \int_G : G = \{x \colon a < x < b\} \text{ sowie} \tag{11.80}$$

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = -\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} = -\int_{\varphi(G)} \tag{11.81}$$

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x))dx = \int_G f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = -\int_G f(\varphi(x))|\varphi'(x)dx| \tag{11.82}$$

$$= -\int_U f(y)dy = -\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(y)dy = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy \tag{11.83}$$

φ ist Diffeomorphismus genau dann, wenn φ bijektiv, φ, φ^{-1} stetig differenzierbar. In der Dimension 1: φ stetig differenzierbar und $\varphi'(x) \neq 0$genau dann wenn φ Diffeomorphismus

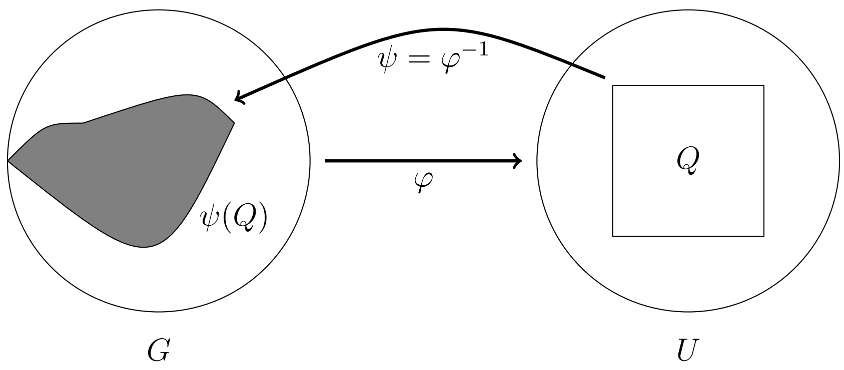
11.8 Vorbereitung für den Beweis der Transformationsformel

11.8.1 Erinnerung: Gleichmäßige Stetigkeit

Sei K kompakt, $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig, das heißt:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \forall x, y \in K\colon \|x-y\|_\infty < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_\infty < \varepsilon \tag{11.84}$$

11.8.2 Situation



$G \overset{\varphi}{\mapsto} U$. Sei Q ein kompakter Quader in U.

11.8.3 Bemerkung

Q kompakter Quader, ψ stetig $\Rightarrow \psi(Q)$ kompakt $\Rightarrow \chi_{\psi(Q)}$ integrierbar.

11.9 Lemma über die Schranken des Volumens einer offenen Menge

Seien $G \overset{\varphi}{\mapsto} U$ Diffeomorphismus, $G, U \underset{offen}{\subset} \mathbb{R}^n, Q \subset U$ kompakter Quader. Weiterhin seien

$$Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \tag{11.85}$$

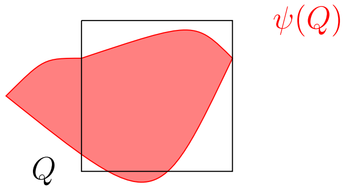
und $1 > \varepsilon > 0$.
Annahme: Seien $\psi = \varphi^{-1}$, $\beta(v) = \psi(v) - v$ und

$$\left|\frac{\partial \beta_i}{\partial x_j}\right|_p \cdot |b_j - a_j| < \varepsilon,\ \forall\, i, j, p \in Q \tag{11.86}$$

Dann gilt:

$$(1-\varepsilon)^n \mathrm{Vol}(Q) \leq \mathrm{Vol}(\psi(Q)) \leq (1+\varepsilon)^n \mathrm{Vol}(Q) \tag{11.87}$$

Beweis Wir setzten o.B.d.A. $a_i = -b_i \,\forall\, i, (0,\dots,0) \in Q$
Idee:



Wenn $x \in Q$, dann gilt $|x_j| \leq b_j \,\forall\, j$. Wieder setzten wir o.B.d.A. $\psi(0,\dots,0) = (0,\dots,0)$.

$$\left|\frac{\partial \beta_i}{\partial x_j}\right| \cdot |b_j - a_j| < \varepsilon \tag{11.88}$$

Ziel: Schranke für $\beta_i(x)$

$$\begin{aligned}|\beta_i(x_1,\dots,x_n) - \beta_i(0,\dots,0)| = |B_i(x_1,0,\dots,0) - \beta_i(0,\dots,0)| \\ + |\beta_i(x_1,x_2,0,\dots,0) - \beta_i(x_1,\dots,0)| + \cdots \\ + |\beta_i(x_1,\dots,x_n) - \beta_i(x_{n-1},\dots,0)|\end{aligned} \tag{11.89}$$

$$\leq |x_1| \max\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right| + \cdots + |x_n| \max\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right| = A \tag{11.90}$$

Weil eindimensional gilt:

$$|g(b) - g(a)| \leq |b-a| \max|g'(x)| \tag{11.91}$$

Also ist

$$A \leq n \max_k |x_k| \max_{i,j}\left|\frac{\partial \beta_i}{\partial x_j}\right| \tag{11.92}$$

Insgesamt also $\forall i \forall x \in Q$:

$$|\beta_i(x)| \leq n \max_k |x_k| \max_{i,j}\left|\frac{\partial \beta_i}{\partial x_j}\right| \tag{11.93}$$

Wenn ε so gewählt ist, dass

$$n \max_k |x_k| \max_{i,j}\left|\frac{\partial \beta_i}{\partial x_j}\right| < \varepsilon_0 \tag{11.94}$$

dann folgt:

$$|\beta_i(x)| < \varepsilon_0 \,\forall\, i \,\forall\, x \in Q \tag{11.95}$$

Wenn ε so gewählt ist, dass $\varepsilon|b_j| < \varepsilon_0$, dann folgt $|\beta_i(x)| < \varepsilon|b_j| \; \forall\, i,j$ und hieraus folgt wiederum

$$\beta(x) \in [-\varepsilon b_1, \varepsilon b_1] \times \cdots \times [-\varepsilon b_n, \varepsilon b_n] \tag{11.96}$$

Mit $\psi(x) = x + \beta(x)$ folgt $\forall x \in Q$:

$$\psi(x) \in \underbrace{[-(1+\varepsilon)b_1(1+\varepsilon)b_1] \times \cdots \times [-(1+\varepsilon)b_n(1+\varepsilon)b_n]}_{(1+\varepsilon)Q=\{v\in\mathbb{R}^n :\, v=(1+\varepsilon)v_0,\; v_0\in Q\}} \tag{11.97}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Vol}(\psi(Q)) \leq \mathrm{Vol}((1+\varepsilon)Q) = (1+\varepsilon)^n \mathrm{Vol}(Q) \tag{11.98}$$

<u>Erinnerung</u>
$\psi \colon U \to \mathbb{R}^n$ mit

$$D\psi \text{ invertierbar } \Rightarrow \psi \text{ ist offene Abbildung, beziehungsweise} \tag{11.99}$$

$$D\psi \text{ invertierbar } \Rightarrow \psi \text{ Diffeomorphismus } \Rightarrow \psi \text{ ist offene Abbildung} \tag{11.100}$$

Das heißt $\forall U$ offen ist $\psi(U)$ offen. Insbesondere gilt hier $\psi(\mathring{Q})$ ist offen, wobei $\mathring{Q}$ = Innere von Q mit:

$$\mathring{Q} =]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[\tag{11.101}$$

Daraus folgt, dass $\psi(\mathring{Q})$ eine offene Umgebung von $\psi(0) = 0$ enthält, da wir angenommen haben, dass $\psi(0) = 0 \in Q$.
Sei nun

$$\rho = \sup\{r \colon r\mathring{Q} \subset \psi(\mathring{Q})\} \tag{11.102}$$

wobei

$$r\mathring{Q} =]ra_1, rb_1[\times \cdots \times]ra_n, rb_n[\tag{11.103}$$

Da $\psi(\mathring{Q})$ eine offene Umgebung von 0 enthält, gilt $g > 0$. Wir wollen zeigen, dass $(1-\varepsilon)Q \subset \psi(\mathring{Q})$ gilt. Es genügt also zu zeigen, dass $\rho \geq 1 - \varepsilon$ gilt.
<u>Denn dann gilt:</u>

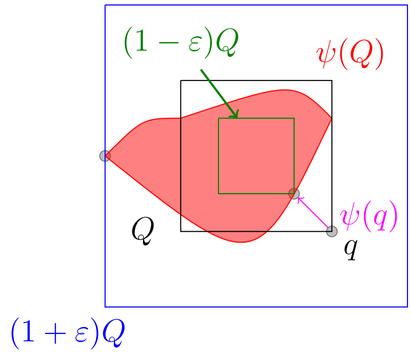
$$(1-\varepsilon)\mathring{Q} \subset \rho\mathring{Q} \Rightarrow \forall\, r > \rho \colon r\mathring{Q} \subset \psi(\mathring{Q}) \tag{11.104}$$

$$\Rightarrow (1-\varepsilon)Q \subset \psi(Q) \tag{11.105}$$

weil Q der Abschluss von $\mathring{Q}$ ist und somit

$$\psi(Q) = \overline{\psi(\mathring{Q})} \tag{11.106}$$

Hilfsbehauptung



Es existiert ein

$$q \in \delta(Q)\colon \psi(q) \in \delta\rho Q = \text{ Rand von } \rho Q \tag{11.107}$$

Beweis der Hilfsbehauptung:
$\psi(\delta\rho Q)$ ist kompakt, weil ρQ kompakt ist. Andererseits gilt:

$$(\rho + \frac{1}{m})\mathring{Q} \not\subseteq \psi(\mathring{Q}) \tag{11.108}$$

nach Definition von ρ. Wähle eine Punktfolge

$$s_m \in (\rho + \frac{1}{m})\mathring{Q} \setminus \psi(\mathring{Q}) \tag{11.109}$$

Nun können wir o.B.d.A. annehmen, dass $s_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} s$ konvergent nach Übergang zu Teilfolge ist, da Q kompakt. Es gilt:

$$s \in \overline{\bigcup_m \left(\rho + \frac{1}{m}\right) Q} = \overline{\rho Q} \tag{11.110}$$

Da

$$s_m \notin \psi(\mathring{Q}) \Rightarrow s \notin \psi(\mathring{Q}), \text{ weil } \psi(\mathring{Q}) \text{ offen.} \tag{11.111}$$
$$\Rightarrow s \notin rQ \text{ für } r < \rho \text{ nach Definiton.} \tag{11.112}$$
$$\Rightarrow s \notin \rho\mathring{Q} \tag{11.113}$$

Also gilt $s \in \delta(\rho Q)$. Es gilt $\rho(Q) \subset \psi(Q)$. $\psi(Q)$ ist kompakt und

$$s \in \delta(\rho Q) \subset \rho Q \subset \psi(Q) \Rightarrow \ \exists\, q \in Q\colon \psi(q) = s \tag{11.114}$$

Da $s \notin \psi(\mathring{Q})$ gilt $q \in \delta Q$

$$q \in \delta Q \text{ mit } Q = [-b_1, b_1] \times \cdots \times [-b_n, b_n] \tag{11.115}$$
$$\Rightarrow \; \exists\, i \colon |q_i| = b_i \tag{11.116}$$

Nach Wahl von ε gilt dann

$$\underbrace{|\psi_i(q) - q_i|}_{\beta_i(q)} < \varepsilon b_i \tag{11.117}$$
$$\Rightarrow \; \exists\, i \colon |\psi_i(q_i)| > (1-\varepsilon) b_i \tag{11.118}$$

Da

$$\psi(q) \in \delta\rho Q \subset \rho Q = [\rho a_1, \rho b_1] \times \cdots \times [\rho a_n, \rho b_n] \tag{11.119}$$

folgt $\rho > (1-\varepsilon)$. Nach der Definition von ρ folgt nun:

$$(1-\varepsilon)\mathring{Q} \subset \psi(\mathring{Q}) \Rightarrow (1-\varepsilon) Q \subset \psi(Q) \tag{11.120}$$
$$\Rightarrow (1-\varepsilon)^n \mathrm{Vol}(Q) \leq \mathrm{Vol}(\psi(Q)) \leq (1+\varepsilon)^n \mathrm{Vol}(Q) \tag{11.121}$$

11.9.1 Fazit

Wenn

$$n \max_{i,j} \left| \frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} \right| \max_k |b_k| < \varepsilon \text{ und } 0 < \varepsilon < 1 \tag{11.122}$$

Dann

$$(1-\varepsilon)^n \mathrm{Vol}(Q) \leq \mathrm{Vol}(\psi(Q)) \leq (1+\varepsilon)^n \mathrm{Vol}(Q) \tag{11.123}$$

11.9.2 Beobachtung und Folgerung

Durch Zerlegung der Quader in Teilquader können wir $\varepsilon > 0$ beliebig klein wählen.

11.10 Strategie für den Beweis der Transformationsformel

Aus der Integrierbarkeit von f auf U folgt die Approximierbarkeit durch Treppenfunktionen. Zerlege Q in hinreichend kleine Quader und ψ in eine Treppenfunktion ψ_0 verknüpft mit einem $\alpha \approx \mathrm{Id}$ nach Lemma (11.9, S. 73).

11.11 Hinweis zum Beweis der Transformationsformel

Der vollständige Beweis der Transformationsformel findet sich im Blackboard (Dateiname *tf.pdf*). Da dieser Beweis nicht in der Vorlesung vorgestellt wurde, fehlt er in diesem Skript implizit.

12 Untermannigfaltikeiten des $\mathbb{R}^n$

12.1 Notation

$$E_k \subset \mathbb{R}^n, \dim(E_k) = k, x_{k+1}, \dots, x_n = 0 \tag{12.1}$$

12.2 Defnitionen für Untermannigfaltigkeiten

1. $M \subset \mathbb{R}^n, M \neq \emptyset$ heißt k-dim Untermannigfalltigkeit von $\mathbb{R}^n$ wenn für alle a gilt: Es existiert eine offene Umgebung U von a und ein Differomorphismus $\varphi\colon U \to V \underset{offen}{\subset} \mathbb{R}^m$ so, dass
$$\varphi(a) = 0, \varphi(M \cap U) = V \cap \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n |\ x_{d+1} = \dots = x_d = 0\}}_{E_k} = V \cap E_k \tag{12.2}$$
2. (φ, U) heißt Karte, U heißt Kartengebiet.
3. $\{(\varphi_i, U_i)\}$ mit $M \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ heißt Atlas.
4. Untermannigfaltigkeiten der Codimension 1 (also $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$) heißen Hyperflächen.

12.2.1 Bemerkungen zu Untermannigfaltigkeiten

1. Das wesentliche Merkmal von Untermannigfaltigkeiten ist, dass sie lokal aussehen wie der euklidische Raum, dass heißt $\mathbb{R}^n$.
2. Präzisere Sprechweise ist: $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltikeit.
3. Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ erben die topologische Struktur von $\mathbb{R}^n$, bei Untermannigfaltigkeiten gilt zusätzlich, dass auch die differenzierbare Struktur vererbt wird.
4. Da $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ abzählbar und dicht in $\mathbb{R}^n$ reichen stets abzählbar viele Karten um einen Atlas zu bekommen.

12.2.2 Beispiele für Untermannigfaltigkeiten

1. $E_k \subset \mathbb{R}^n$, Karte=Identität.
2. Affine Unterräume.
3. $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.
4. Offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.
5. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m \in \mathcal{C}^k$, dann ist Graph$(f) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ Untermannigfaltigkeit von Klasse $\mathcal{C}^k$.

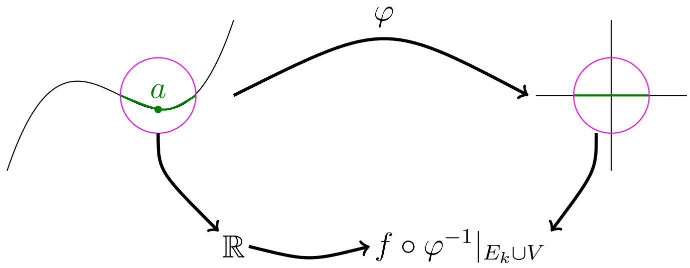
6. $GL(n, \mathbb{R})$ sind Untermannigfaltigkeiten, denn sie sind offen und es gilt

$$GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \tag{12.3}$$

7. $P(x, y) = xy$, dann ist $N(P)$ *keine* Untermannigfaltigkeit, denn er ist der $\mathbb{R}^2$.

12.3 Definition von Differenzierbarkeit

Sei $M \subset \mathbb{R}^n k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $f\colon M \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt f differenzierbar in $a \in M$, wenn $f \circ \varphi^{-1}$ eingeschränkt auf $E_k \cup B$ differenzierbar in $\varphi(a)$ ist.



12.3.1 Bemerkung

Diese Definition von Diffenrenzierbarkeit ist unabhängig von der Wahl der Karte.

12.4 Ausblick

M ist Untermannigfaltigkeit ist äquivalent zu:

1. M ist lokal parametrisierbar durch "schöne differenzierbare Funktionen".

2. M ist lokal Nullstellenmenge einer "schönen Funktion".

3. M ist lokal Graph einer "schönen Funktion".

12.5 Untermannigfaltigkeitssatz unter Funktionen

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer, dann ist M eine d-dimensionale Untermannigfaltikeit genau dann, wenn es für alle $p \in M$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von p und eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung

$$f = (f_1, \ldots, f_{n-d})\colon U \to \mathbb{R}^{n-d} \tag{12.4}$$

mit

$$M \cap U = f^{-1}(0) \cap U \tag{12.5}$$

$$f_i'(p) \text{ sind linear unabhängig} \tag{12.6}$$

Beweis ($\Rightarrow$) Sei Md-dimensionale Untermannigfaltikeit von $\mathbb{R}^n, p \in M$. Nach Definition existiert die Abbildung $\varphi\colon U \to V$ die $M \cap U$ identifiziert mit $E_d \subset \mathbb{R}^n$. Definiere

$$f_i \coloneqq \varphi_{d+i}, 1 \leq i \leq n-d \tag{12.7}$$

φ ist Diffeomorphismus, dass heißt $d\varphi(p)$ hat für alle $q \in U$ vollen Rang. Also sind

$$f_1'(p), \ldots, f_{n-d}'(p) \tag{12.8}$$

linear unabhängig.
($\Leftarrow$) Seien (12.5) und (12.6) und $p \in M$. Wegen (12.8) können wir (12.6) zu einer Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$, welches die Menge der linearen Abbildungen im $\mathbb{R}^n$ ist, auch gennant Dualraum, ergänzen. Diese Basis hat die Darstellung,

$$(\varphi_1, \ldots, \varphi_d, f_1'(p), \ldots, f_{n-d}'(p)) \tag{12.9}$$

Definiere $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ mit

$$x \mapsto (\varphi_1(x), \ldots, f_{n-d}(x)) \tag{12.10}$$

$d\varphi(p)$ hat vollen Rang. Dann ist φ lokal bei p nach einer eventuellen Verkleinerung von U ein Diffeomorphismus. Wegen (12.5) und der Konstruktion von $\varphi(U \cap M) = E_d \cap \varphi(U)$. Also ist φ eine Karte bei p.

12.6 Definition von regulären Punkten und Werten

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar.

1. $x \in U$ heißt regulärer Punkt von f, wenn das Differential $df(x)$ surkjektiv ist.

2. $c \in \mathbb{R}^m$ heißt regulärer Wert von f, wenn alle $x \in f^{-1}(c)$ reguläre Punkte sind.

3. Ein nicht-regulärer Punkt heißt singulär.

12.6.1 Bemerkung

Surjektivität des Differentials $df(p)$ bedeutet, dass der Rang der Jacobimatrix $J_f(p)$ gleich $\dim(\mathbb{R}^m)$ ist.

12.7 Satz, dass die Niveaumenge eines regulären Wertes eine Untermannigfaltigkeit ist

Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine $\mathcal{C}^{-1}$-Abbildung, $M := f^{-1}(c)$ Niveaumenge eines regulären Wertes c, dann ist M eine Untermannigfaltigkeit mit $\operatorname{codim}(M) = \dim(\mathbb{R}^m)$ beziehungsweise $\dim(M)$=$\dim(\mathbb{R}^n)$-$\dim(\mathbb{R}^m)$.

Beweis Sei $a \in M = f^{-1}(c)$. Da c regulärer Wert ist, ist $df(a)$ surjektiv. Daraus folgt:

$$n := \dim(\mathbb{R}^n) \geq \dim(\mathbb{R}^m) \tag{12.11}$$

Definiere

$$d := n - \dim(\mathbb{R}^m) \tag{12.12}$$

und

$$F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d} \tag{12.13}$$

mit

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto f(x) - c \tag{12.14}$$

Dann ist $M = f^{-1}(0)$ und wegen der Surjektivität des Differentials sind die Ableitungen

$$F_1'(a), \dots, F_{n-d}'(a) \tag{12.15}$$

linear unabhängig. Daraus folgt $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine d-dimensionale Untermannigfaltikeit.

12.7.1 Beispiel, dass der Rand der Kreisscheibe eine Untermannigfaltigkeit ist

$S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist Untermannigfaltigkeit, wobei gilt:

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \sum x_i^2 = 1\} \tag{12.16}$$

Beweis Definiere $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum x_i^2 - 1$. Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = 2x_1, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 2x_n \tag{12.17}$$

$$\Rightarrow f'(p) = 2(x_1, \dots, x_n) \tag{12.18}$$

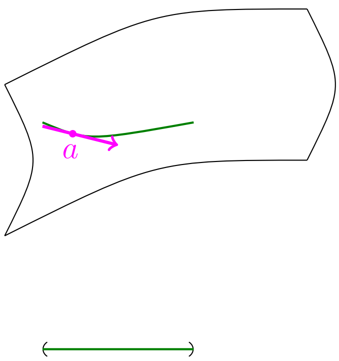
Also ist $x = 0$ ein regulärer Punkt und auch Wert

12.8 Definition von Tangentialräumen und Vektoren

Sei M eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit vom $\mathbb{R}^n$.

1. $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor in $a \in M$, wenn gilt:

$$\exists \varepsilon > 0 \colon \alpha \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \tag{12.19}$$
$$\alpha(0) = a \text{ und } \alpha'(0) = v \tag{12.20}$$



2. Die Menge der Tangentialvektoren in $a \in M$ heißt Tangentialraum in a, T_aM.

12.8.1 Bemerkung

T_aM ist d-dimensinaler $\mathbb{R}$-Vektorraum

12.8.1.1 Beispiele

1.

$$T_o\mathbb{R}^n; 1 \leq i \leq n; \alpha_i(-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n, \alpha_i(t) = te_i \tag{12.21}$$
$$\alpha_i'(t) = e_i \Rightarrow T_0\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \tag{12.22}$$

denn die α_i sind unabhängig.

2.

$$S^1 \subset \mathbb{R}^2; \alpha_\lambda(-\varepsilon, \varepsilon) \to S^1 \tag{12.23}$$
$$t \mapsto e(t + \frac{\pi}{2}) = (cos(\lambda t + \frac{\pi}{2}), sin(\lambda t + \frac{\pi}{2})) \tag{12.24}$$
$$\alpha'(t) = (-sin(\lambda t + \frac{\pi}{2})\lambda, cos(\lambda t + \frac{\pi}{2})\lambda) \tag{12.25}$$
$$\alpha'(0) = (-sin(\frac{\pi}{2})\lambda, cos(\frac{\pi}{2})\lambda) = (-\lambda, 0) \tag{12.26}$$

12.9 Satz über die Vektorraum- und Kerneigenschaften des Tangentialraumes einer Untermannigfaltigkeit

Gegeben sei die Untermannigfaltigkeit $M^d, a \in M$. Dann gilt:

1. T_aM ist $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension d.

2. Gegeben $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $M = f^{-1}(c), c$ regulärer Wert, dann ist $T_aM = \text{Kern } df(a)$

Beweis

1. Wenn M offene Menge in E_d ist, dann ist die Aussage klar.
   Idee:
   Lokal sehen Untermannigfaltigkeiten genau so aus wie offene Mengen in E_d. Sei $\varphi\colon U \to V$ Karte bei $a \in M$ Durch φ werden Kurven bei $a \in M$ abgebildet auf Kurven bei $\varphi(a) \in V$. Definiere zu $\alpha\colon]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ die Kurve

$$\alpha^*\colon]-\varepsilon, \varepsilon[\to V, \alpha^*(0) = \varphi(a) \tag{12.27}$$

   Dies ist eine Bijektion. Ingesamt folgt nun, dass T_aM ist d-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

2.

$$\alpha\colon]-\varepsilon, \varepsilon[\to M, f \circ \alpha = c \tag{12.28}$$
$$\Rightarrow df(a) \quad \alpha(0) = 0 \tag{12.29}$$
$$\Rightarrow T_aM \subset \text{ Kern } df(a) \tag{12.30}$$
$$\dim(\text{ Kern } df(a)) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\mathbb{R}^m) = \dim(M) = \dim T_aM \tag{12.31}$$
$$\Rightarrow T_aM = \text{ Kern } df(a) \tag{12.32}$$

12.9.1 Beispiel von der orthogonalen Gruppe

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | A^tA = E\} \tag{12.33}$$

ist Untermannigfaltigkeit und

$$T_EO(n) = \{H \in \mathbb{R}^{n\times n} | H = -H^t\} \tag{12.34}$$

Beweis Symm($n \times n$) bezeichne die symmetrischen Matrizen. Sei $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \text{Symm}(n\times n)$ mit

$$f(A) = A^t A \Rightarrow O(n) = f^{-1}(E) \tag{12.35}$$

Also ist f stetig differenzierbar. Berechne das Differential von f an der Stelle A:

$$df(A)\cdot H = A^t H + H^t A \tag{12.36}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} f(A+tH) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} (A+tH)^t(A+tH) \tag{12.37}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} (A^t + tH^t)(A+tH) \tag{12.38}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} A^tA + A^ttH + tH^tA + t^2H^tH \tag{12.39}$$

$$= A^tH + H^tA \tag{12.40}$$

Ist $df(A)$ surjektiv? Sei S eine beliebige symmetrische Matrix und definiere $H := \frac{1}{2}AS$. Daraus folgt

$$df(A) \text{ ist surjektiv} \tag{12.41}$$

$$\Rightarrow df(E)H = HH^t \Rightarrow Kern = \{H = -H^t\} \tag{12.42}$$

13 Normalraum

$x, y = \mathbb{R}^n$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ Standardskalarprodukt. $\langle x, y\rangle = \sum x_i y_i$, $M \subset \mathbb{R}^n$

13.1 Definition des Normalraums

1. $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Normalenvektor*, wenn $\langle v, T_aM\rangle = 0$.
2. Der *Normalenraum* wird definiert durch:

$$N_aM := (T_aM)^\perp \tag{13.1}$$

13.1.1 Bemerkung über den Gradienten

$$\text{grad}(g(a)) = \Big(\frac{\partial g}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\Big)^t \tag{13.2}$$

13.2 Lemma, über eine Basis des Normalenraumes

Seien $M = f^{-1}(c)$, f eine C^1-Abbildung, c regulärer Wert, $f\colon U \to \mathbb{R}^{n-d}$, dann bilden

$$\text{grad} f_1(a), \dots, \text{grad} f_{n-d}(a) \tag{13.3}$$

eine Basis des Normalenraums

Beweis (grad $f_i)^t$ ist gerade die i-te Zeile der Jacobimatrix. Aus dem vorigem Satz folgt dann:

$$v \in T_aM \Leftrightarrow \langle \text{grad} f_i(a), v\rangle = 0 \tag{13.4}$$

für alle $i = 1, \ldots, n-d$, dass heisst, die obigen Gradienten stehen senkrecht auf T_aM. Da $J_{f(a)}$ vollen Rang$= n-d$ hat folgt, dass die obigen Gradienten linear unabhängig sind.

13.2.1 Bemerkung

Der Begriff des Normalenraumes wird wichtig, wenn man sogenannte orientierbare Untermannigfaltigkeiten betrachten.

14 Immersionen

14.1 Definiton von Immersionen

Sei

$$\Omega \subset \mathbb{R}^d, \gamma\colon \Omega \to \mathbb{R}^n \tag{14.1}$$

eine C^1-Abbildung. γ heißt *Immersion*, wenn ihr Differential überall injektiv ist.

14.1.1 Bemerkung über Immersionen

1. $d\gamma(u)$ ist genau dann injektiv, wenn $J_\gamma(U)$ Rang d hat.
2. Eine Immersion γ bildet die "Standardkurven" ($\varepsilon_i = u + te_i$) ab auf Kurven der Form:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} (\gamma \circ \varepsilon_i)(t)}_{J_{\gamma(0)e_i}} = \frac{\partial}{\partial n_i}\gamma(n)\bigg|_{n=0} \tag{14.2}$$

14.1.2 Beispiele von Immersionen

1. Sogenannte reguläre Kurven sind Immersionen $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$, das heißt $\gamma'(a) \neq 0 \,\forall\, a$.
2. Graphen lassen sich sehr einfach durch Immersionen parametrisierter $x \mapsto (x, f(x))$ darstellen.

14.2 Bemerkung, über Parametrisierungen

Parametrisierungen entsprechen ungefähr Graphen.

14.3 Definition der Äquivalenz von Parametrisierungen

Zwei Parametrisierungen heißen äquivalent, wenn sie sich höchsten um ein Diffeomorphismus T unterscheiden (also $\gamma_1 \circ T = \gamma_2$).

14.4 Lemma über die lokale Normalform einer Immersion

Gegeben sei eine Immersion $\gamma\colon \mathbb{R}^d \supset \Omega \to \mathbb{R}^n$. Dann ist γ lokal und nach eventueller Permutation der linearen Koordinaten von $\mathbb{R}^n$ äquivalent zu einer Parametrisierung

$$\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_n) \text{ mit} \tag{14.3}$$

$$\tilde{\gamma}_i = \mathrm{Pr}_i\,,\ i = 1, \ldots, d \tag{14.4}$$

<u>Genauer:</u>
Für jeden Punkt $u_o \in \Omega$ existiert eine offene Umgebung $\Omega_0 \subset \Omega$ und eine Permutation $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ derart, dass $P \circ \gamma|_{\Omega_0}$ äquivalent zu

$$\tilde{\gamma}(x) = (x_1, \ldots, x_d, \tilde{\gamma}_{d+1}, \ldots, \tilde{\gamma}_n(x)) \tag{14.5}$$

ist. Insbesondere gilt, dass $\gamma(\Omega_0)$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension d ist.

Beweis Nach einer Permutation der Koordinaten können wir annehmen, dass die Ableitungen von $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ linear unabhängig sind. Mit dem Satz der Umkehrabbildung folgt nun: $T \coloneqq (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ ist Diffeomorphismus auf $\Omega_0 \to V \subset \mathbb{R}^n$. Wir definieren

$$\tilde{\gamma} \coloneqq \gamma \circ T^{-1}\colon V \to \mathbb{R}^n \tag{14.6}$$

$\tilde{\gamma}$ ist eine Immersion, denn

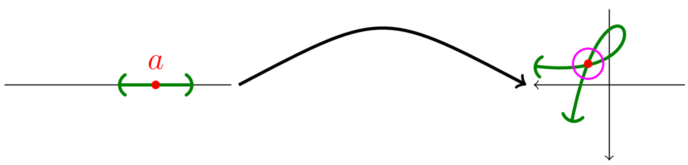
$$\underbrace{d\tilde{\gamma}(x)}_{\text{injektiv}} = \underbrace{d\gamma(T^{-1}(x))}_{\text{injektiv}} \circ \underbrace{dT^{-1}(x)}_{\text{injektiv}} \tag{14.7}$$

Also leistet $\tilde{\gamma}$ das gewünschte und $\gamma(\Omega_0) \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Untermannigfaltigkeit.

14.4.1 Bemerkung über die lokale Normform

Für die obige lokale Normalform $\tilde{\gamma}$ gilt: $\tilde{\gamma}^{-1} = Pr_{1,\ldots,d}$

14.4.2 Beispiel, dass Bilder von Immersionen im allgemeinen keine Untermannigfaltigkeiten sind



14.5 Definition der Einbettung

Eine Immersion $\gamma\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt *Einbettung*, wenn γ glatt und immersiv, injektiv und Homöomorphismus auf das Bild ist, das heißt $\gamma\colon \Omega \to \gamma(\Omega)$ ist Homöomorphismus bezüglich der Topologie von Ω als offene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ und der Relativtopologie auf $\gamma(\Omega)$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

14.6 Untermannigfaltigkeitssatz für Einbettungen

1. Das Bild einer Einbettung $\gamma\colon \Omega \to \mathbb{R}^n, \Omega \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^d$ ist eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$.
2. Je zwei Einbettungen $\gamma_i, j\ \Omega_i \to \mathbb{R}^n$ mit gleichem Bild sind äquivalent.

Beweis

1. Sei $d \in M = \gamma(\Omega)$. Setze $U = \gamma^{-1}(a)$. Nach Lemma 14.4 existiert eine Umgebung γ_0 von $a \in M$ so, dass $\gamma(\Omega_0)$ eine Untermannigfaltigkeit ist. γ ist Homöomorphismus auf $\gamma(\Omega)$, also ist γ eine offene Umgebung mit $M \cup U = \gamma(\Omega_0)$
2. Gegeben $\gamma_i\colon \Omega_i \to \mathbb{R}^n$ und
$$\gamma_1(\Omega_1) = M = \gamma_2(\Omega_2) \tag{14.8}$$
Man betrachte die Abbildung
$$T = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1\colon \Omega_1 \to \Omega_2 \tag{14.9}$$
Weil T ein Homöomorphismus ist, reicht es zu zeigen, dass T eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung ist. Betrachte $u_1 \in \Omega_1 T(U_1) =: u_2$. Wir wenden auf U_2 Lemma 14.4 an. Wir erhalten eine Umgebung $\Omega_{2,0} \subset \Omega_2$ auf einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^d$ und es existiert eine Parametrisierung
$$\gamma_2|_{\Omega_{2,0}} = p^{-1} \circ \tilde{\gamma_2} \circ \tau \tag{14.10}$$
wobei τ laut 14.4.1 Diffeomorphismus zwischen $\tilde{\gamma_1}$ und $\tilde{\gamma_2}$. Weiterhin folgt
$$\gamma_2^{-1} = \tau^-1 \circ \underbrace{\tilde{\gamma}_2^{-1} \circ p}_{\text{Pr}} \,\text{auf}\, \gamma(\Omega_{2,0}) \tag{14.11}$$
Wegen
$$\gamma_2 \circ T = \gamma_1 \tag{14.12}$$
folgt nun
$$\tau \circ Pr^{-1} \circ T = \gamma_1 \tag{14.13}$$
$$\tag{14.14}$$
Also ist $T \in C^1$.

15 Exkurs: Topologische Grundbegriffe

Dieser Abschnitt beruht auf der Übung von Benjamin Böhme (mit freundlicher Genehmigung) und auf den topologischen Hintergrund aus dem 10. Aufgabenblatt der Vorlesung.

15.1 Definition einer Topologie

Sei X eine Menge, dann heißt $\tau \subset P(X)$ eine *Topologie*, falls:

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. $\sigma_1, \sigma_2 \in \tau \Rightarrow \sigma_1 \cup \sigma_2 \in \tau$
3. $\sigma_1 \in \tau \, \forall \, i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} \sigma_i \in \tau$

15.2 Definition eines topologischen Raumes

Das Paar (X, τ) heißt *topologischer Raum.*
Hinweis: Implizit wird der topologische Raum auch nur mit X *notiert.*

15.3 Definitionen von Offenheit, Abgeschlossenheit und Umgebung in topologischen Räumen

1. σ heißt *offen in* X, falls $\sigma \in \tau$
2. $A \sigma X$ heißt *abgeschlossen in* X, falls $X \setminus A \in \tau$
3. $U \subset X$ heißt *Umgebung von* a $\in$ X, falls ein $\sigma \in \tau$ mit $a \in \sigma \subseteq U$ existiert.

15.4 Definition der Stetigkeit von Funktionen über topologischen Räumen

Seien $(X, \tau_X)(Y, \tau_Y)$ topologische Räume, dann heißt $f\colon X \to Y$ stetig, falls Urbilder offener Mengen offene sind beziehungsweise Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.

15.5 Beispiele für topologische Räume und Stetigkeit

1. Die *Klumpentopologie* ist definiert als (X, τ) mit $\tau = \{\emptyset, X\}$.
2. Die *diskrete Topologie* ist definiert als (X, τ) mit $\tau = P(X)$.
3. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ ist ein normierter Vektorraum. Die euklidische Norm gibt die aus Analysis II bekannten offenen Mengen, die sogenannte *Standardtopologie auf* $\mathbb{R}^n$. (Hierbei ist τ die Menge aller offenen Mengen, die aus der euklidischen Norm gewonnen werden.)

4. Sei

$$f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y), x \mapsto y_0 \text{ konstant} \tag{15.1}$$

Dann ist f stetig. Für beliebige $V \subset X$ gilt:

$$f^{-1}(U) = \emptyset \in \tau_X \text{ oder } f^{-1}(U) = X \in \tau_X \tag{15.2}$$

15.6 Definition von Hausdorffschheit

Ein topologischer Raum X heißt *hausdorffsch*, wenn für alle Punkte $p, p' \in X$ gilt, dass es offene, disjunkte Mengen $U, U' \subset X$ gibt mit $p \in U, p' \in U'$.

15.7 Definition einer Teilraumtopologie

Sei (X,τ) ein topologischer Raum, $T \subset X$. Setze die *Teilraumtopologie*

$$J \coloneqq \{\sigma \cup T | \sigma \in \tau\} \tag{15.3}$$

Dann ist (T, J) ein topologischer Raum und $U \subset T$ offen in T, falls $U \in J$.

15.8 Definition von Kompaktheit

(X,τ) heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt, das heißt:

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i \in \tau \Rightarrow X = \bigcup_{j \in J} U_j, J \overset{\text{endlich}}{\subset} I \tag{15.4}$$

15.9 Satz über Kompaktheit von abgeschlossenen Teilmengen

Seien X kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen, dann ist A kompakt.

15.10 Definition von Lokalkompaktheit

Ein topologischer Raum X heißt *lokalkompakt*, wenn jeder Punkt $p \in X$ eine kompakte Umgebung U_p besitzt.

15.11 Definition einer topologischen Einbettung

Seien X, Y topologische Räume. Dann heißt eine Abbildung $\iota\colon X \to Y$ *topologische Einbettung*, wenn $\iota(X)$ homöomorph auf $\iota(X)$ abbildet, wobei $\iota(X) \subset Y$ mit der Teilraumtopologie versehen ist.

15.12 Definition von eigentlichen Abbildungen zwischen topologischen Räumen

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *eigentlich*, wenn für jede kompakte Menge $K \subset Y$ ihr Urbild $f^{-1}(K) \subset X$ kompakt ist.

15.13 Satz über die Eigentlicheit von Funktionen über einem kompakter topologischer Raum

Seien X, Y topologische Räume, X kompakt und $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist f eigentlich.

15.14 Satz über die Alexandroff-Kompaktifizierung (Aufgabenblatt)

Sei X ein lokalkompakter, hausdorffscher topologischer Raum. Dann existiert eine bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmte Kompaktifizierung $\hat{X}$, sodass gilt:

1. $\hat{X}$ ist kompakt und hausdorffsch
2. Es existiert eine topologische Einbettung $\iota\colon X \to Y$
3. $\hat{X} \setminus \iota(X)$ besteht aus einem einzigen Punkt (genannt "∞")
4. $\hat{X}$ kann identifiziert werden mit $X \cup \{\infty\}$
5. Die Topologie auf $\hat{X}$ ist bestimmt durch folgende Festlegung: die offenen Mengen in $\hat{X} \setminus \{\infty\}$ sind genau die offenen Mengen in X; die offenen Umgebungen von $\infty \in \hat{X}$ sind von der Form $\hat{X} \setminus K$, wobei $K \subset X$ kompakt ist.

15.15 Satz über die Ein-Punkt-Kompaktifizierung (Übung Böhme)

Sei X ein topologischer Raum. Falls X nicht kompakt ist, lässt sich X zu $\hat{X} \coloneqq X \cup \{\infty\}$ kompaktifizieren.

Topologie auf $\hat{X}$ $U \subset \hat{X}$ heißt offen, falls $\infty \notin U$ und U offen in X oder $\infty \in U$ und $X \setminus U$ kompakt ist.

Beweis des Satzes Sei $(U_i)_{i \in I}$ offene Teilüberdeckung von $\hat{X}$. Es existiert ein $k \in I\colon \infty \in U_k$ offen. Nach Definition ist $\hat{X} \setminus U_k$ kompakt. Dann existiert $J \overset{\text{endlich}}{\subset} I$ so, dass

$$\hat{X} \setminus U_k \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j \Rightarrow \bigcup_{j \in J} U_j \cup U_k \supseteq \hat{X} \tag{15.5}$$

Also existiert eine endliche Teilüberdeckung von $\hat{X}$

15.16 Satz über die stetige Erweiterung einer Funktion über topologische Räume

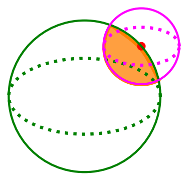
Es seien X, Y lokalkompakte, hausdorffsche topologische Räume und $f\colon X \to Y$ stetig. Die Kompaktifizierungen von X beziehungsweise Y bezeichnen wir mit $\hat{X}$ beziehungsweise $\hat{Y}$; ihre unendlich fernen Punkte mit ∞_X beziehungsweise ∞_Y. Dann lässt sich f genau dann durch die Festlegung $\infty_{\hat{X}} \to \infty_Y$ zu einer stetigen Abbildung

$$\hat{f}\colon \hat{X} \to \hat{Y} \tag{15.6}$$

erweitern, wenn f eigentlich ist.

16 Integration auf Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ und der Satz von Stokes

16.1 Definition und Proposition der Relativtopologie einer Teilmenge eines topologischen Raumes

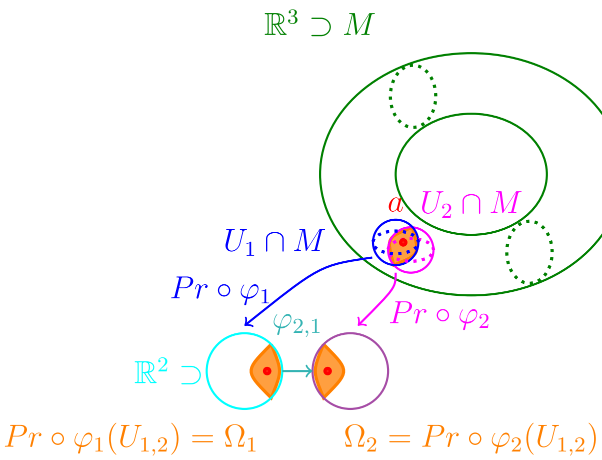


Sei (X, τ_x) topologischer Raum und $Y \subset X$. Dann ist

$$\tau_Y := \{U \cap Y | U \in \tau_X\} \tag{16.1}$$

eine Topologie auf Y, gennant die *Relativtopologie von* Y *als Teilmenge von* (X, τ_X) oder die *von* (X, τ_X) *auf* Y *induzierte Topologie.*

16.2 Satz über den Kartenwechsel



Seien $\Omega_1, \Omega_2 \underset{offen}{\subset}, \gamma_i \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ Einbettungen für $i = 1, 2$ mit gleichem Bild, dass heißt $\gamma_1(\Omega_1) = \gamma_2(\Omega_2)$. Dann existiert ein Diffeomorphismus $T \colon \Omega_1 \to \Omega_2$

$$\gamma_2 \circ T = \gamma_1 \tag{16.2}$$

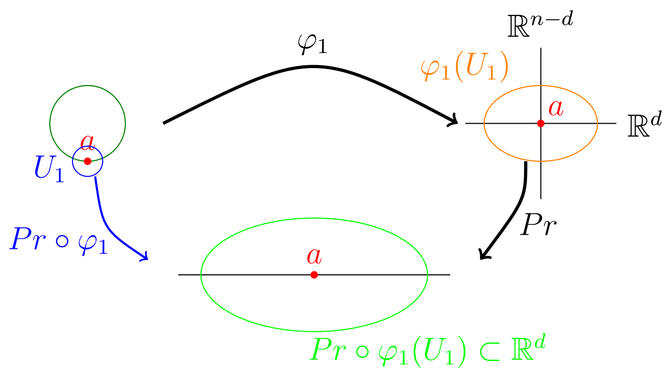
Wir setzen $U_{1,2} \coloneqq U_1 \cap U_2$ und erhalten zwei Einbettungen mit Bild $U_{1,2} \cap M\Theta$.

$$\gamma_1 \colon Pr(\gamma_1(U_{1,2})) \to \mathbb{R}^n, z \mapsto \varphi^{-1}((\underbrace{z}_{\mathbb{R}^d}, \underbrace{0}_{\mathbb{R}^{n-d}})) \tag{16.3}$$

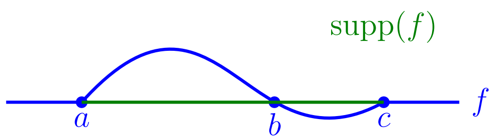
und γ_2. Mit Satz 16.2 existiert

$$T \colon \Omega_1 \to \Omega_2 \text{ mit } \gamma_2 \circ T = \omega_1 \tag{16.4}$$

Wir nennen $\varphi_{2,1} \coloneqq T$ einen *Kartenwechsel von M*.



16.3 Definition des Trägers einer Funktion



Sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig oder glatt. Dann heißt

$$\operatorname{supp}(f) \coloneqq \overline{\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \neq 0\}} \tag{16.5}$$

der *Träger* oder *Support von f* und im Allgemeinen heißt $A \subset\subset B$ für $A, B \subset (X, \tau_X), \overline{A}$ kompakt und $\overline{A} \subset B$.

16.4 Ziel: Integraton auf Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n \supset M$

Naiver Versuch $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig oder glatt mit $\operatorname{supp}(f) \subset\subset U, (U,\varphi)$ Karte für M.

$$„\int_M f\text{“} := \int_{M\cap U} f = \int_{\varphi(M\cap U)} = \int_{V\cap E_d} f\circ\varphi^{-1} \tag{16.6}$$

$$= \int_{Pr(V\cup E_d) \overset{Lebesgue}{=} \Omega} f(\varphi^{-1}(z))dz \text{ wobei} \tag{16.7}$$

$$z \in \mathbb{R}^d \underset{offen}{\supset} \Omega \tag{16.8}$$

Frage Seien $(U,\varphi_1),(U,\varphi_2)$ zwei Untermannigfaltigkeitskarten.

$$\int_{\Omega_1 = E_d\cup\varphi_1(U)} f\circ\varphi^{-1} \overset{?}{=} \int_{\Omega_2=E_d\cup\varphi_2(U)} f\circ\varphi^{-1} \tag{16.9}$$

Wir setzen

$$\rho\colon \Omega_2 \to \mathbb{R} \text{ mit} \tag{16.10}$$

$$g \mapsto f\circ\varphi^{-1}((y,0)) = f\circ\gamma_2(y) \tag{16.11}$$

und haben mit Hilfe der Transformationsformel,

$$\varphi_{2,1} = T\colon \Omega_1 \to \Omega_2 \text{ mit } \Omega_1 \overset{T}{\mapsto} \Omega_2 \overset{g}{\mapsto} \mathbb{R} \tag{16.12}$$

$$\int_{E_d\cap\varphi_2(U)} f\circ\varphi_2^{-1} = \int_{\Omega_2} g(y)dy \int_{\Omega_1} g(T(x))|\det T'(x)|dx = \sigma \tag{16.13}$$

und

$$\int_{\Omega_1} f\circ\varphi^{-1} = \int_{\Omega_1} g(T(x))dx = \xi \tag{16.14}$$

da

$$g(T(x)) = f(\gamma_2(T(x))) = f\circ\gamma_1(x) = f\circ\varphi^{-1}((x,0)) \tag{16.15}$$

mit $\sigma \neq \xi$. Also führt der naive Ansatz nicht zum einer vernünftigen Definition der Integration über M.

16.5 Strategie für die Integration über M

1. *Infinitesimal*, dass heißt Volumen auf T_aM (multilineare Algebra).
2. *Lokal*, dass heißt auf Karte (U,φ) (Differentialformen).
3. *Global*, dass heißt auf M (Differentialformen und Zerlegung der Eins).

16.6 Volumenbegriff für Parallelotope

$$v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n, P\colon P(v_1, \ldots, v_n) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i v_i | t_i \in [0,1] \right\} \tag{16.16}$$

Dann ist $\mathrm{Vol}(P) = |\det(A)|$ wobei

$$A = \left(v_1, \ldots, v_n \right) \tag{16.17}$$

Dies entspricht der Transformationformel, da

$$T_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad x \mapsto Ax \tag{16.18}$$

Es gilt dann $T_A(e_i) = v_i$ und $T_A(\text{Einheitswürfel}) = P$ und mit Hilfe der Transformationsformel gilt

$$\mathrm{Vol}(P) = \mathrm{Vol}(T_A(w)) = |\det(A)|\mathrm{Vol}(w) = |\det(A)| \tag{16.19}$$

16.7 Definition des orentierten Volumens

$\mathrm{Vol}_{or}(P)\colon \det(A)$ nennt man das *orientierte Volumen* von P.

16.8 Beispiel des orientierten Volumens für $n = 1, 2$

$n = 1, v_1$ negativ:

$$\Rightarrow \mathrm{Vol}_{or}(P(v_1)) = -\|v_1\|_\infty \tag{16.20}$$

$n = 2, P(v_2, v_1)$ gegen den Uhrzeigersinn orientiert:

$$\Rightarrow \mathrm{Vol}_{or}(P(v_2, v_1)) = -\mathrm{Vol}(P(v_1, v_2)) \tag{16.21}$$

16.9 Multilineare Algebra

16.9.1 Konvention

$$\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\} \tag{16.22}$$

16.9.2 Definition einer Bilinearform

Eine *Bilinearform* B auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X ist eine Abbildung $B\colon V \times V \to \mathbb{K}$ so, dass für $v, v', w, w' \in X, \lambda \in \mathbb{K}$ gelten

1. $B(v + \lambda v', w) = B(v, w) + \lambda B(v', w)$
2. $B(v', w + \lambda w') = B(v, w) + \lambda B(v, w')$

16.9.3 Bemerkung zu Matrizen von Bilinearformen

Eine Bilinearform B liefert Matrix $Q = Q_B \in M(n, \mathbb{K})$ mit

$$B(x,y) = B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_i \sum_j x_i \underbrace{B(e_i, e, j)}_{Q_{i,j}} y_j \tag{16.23}$$

$$= \sum_{i,j} x_i Q_{i,j} y_j = x^t Q_b y \tag{16.24}$$

wobei $(Q_B)_{i,j} := Q_{i,j}$

16.9.4 Bemerkung zum Pullback einer Bilinearform

Wenn B Bilinearform auf V und $T\colon U \to V\mathbb{K}-$-linear, dann haben wir den *Pullback von B unter T*:

$$T^* B(u_1, u_2) := B(T(u_1), T(u_2)) \,\forall\, u_1, u_2 \in U \tag{16.25}$$

ist eine Bilinearform auf U.

16.9.4.1 Übung

$$U = \mathbb{K}^n \to V = \mathbb{K}^m, A \in M(n \times m, \mathbb{K}) \tag{16.26}$$

und $T = T_A$. Dann gilt

$$Q_{T_A^*(B)} = A^t Q_B A \tag{16.27}$$

16.9.5 Definition von symmetrischen und antisymmetrischen Bilinearformen

Eine Bilinearform auf V heißt *symmetrisch* beziehungsweise *antisymmetrisch* wenn gilt

$$B(w,v) = B(v,w) \tag{16.28}$$

beziehungsweise

$$B(w,v) = -B(v,w) \tag{16.29}$$

16.9.6 Bemerkung über antisymmetrische Bilinearformen

Wenn B antisymmetrisch ist, dann gilt $B(v,v) = 0$.

16.9.7 Lemmata über weitere Eigenschaften von Bilinearformen

1. Jede Bilinearform ist Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Bilinearform.

2. Ist Q_B die Abbildungsmatrix von $B \in GL(n, \mathbb{R})$, so gilt:

$$B \text{ symmetrischt } \Leftrightarrow Q_B^t = Q_B \tag{16.30}$$

$$B \text{ antisymmetrisch } \Leftrightarrow Q_B^t = -Q_B \tag{16.31}$$

16.9.7.1 Beispiele zu 16.9.7

1. Lorentz-Metrik:

$$B\colon \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, (x_0, x)^t \in \mathbb{R}^{n+1}, x_0 \in \mathbb{R} \tag{16.32}$$
$$B((x_0, x), (y_0, y)) := x_0 y_0 - x^t y \tag{16.33}$$

2.

$$B\colon \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}, (p, q)^t \in \mathbb{R}^{2n}, p, q \in \mathbb{R}^n \tag{16.34}$$
$$B((p, q), (p', q')) := p^t q' - (p')^t q \tag{16.35}$$

16.9.8 Definition des Dualraumes

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B}_V = \{e_\alpha | \alpha \in A\}$. Dann heißt

$$V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}) := \{\varphi\colon V \to \mathbb{K} | \varphi \text{ ist } \mathbb{K}\text{-linear }\} \tag{16.36}$$

der *Dualraum von V*. Die zu $\mathcal{B}$ duale Basis von V^* ist

$$\mathcal{B}_{V^*} = \{e^*_\alpha | \alpha \in A\} \tag{16.37}$$

wobei $e^*_\alpha\colon V \to \mathbb{K}$ eindeutig durch

$$e^*_\alpha(\varphi_\beta) := \delta_{\alpha,\beta} := \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{16.38}$$

festgelegt wird.

16.9.9 Definition des Raumes der $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen und Lemma über weitere Eigenschaften des Raumes

Sei V $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ und Dualbasis $\{e^*_1, \dots, e^*_n\}$ von V^*.

1. Für $k \geq 1$ ist der Raum der $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen definiert durch

$$\otimes^k V^* := \{t\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k-\text{mal}} \to \mathbb{R} | t \text{ ist } \mathbb{K}\text{-linear }\ \} \tag{16.39}$$

2. Für

$$t \in \otimes^k V^*, s \in \otimes^k V^* \tag{16.40}$$

ist

$$t \otimes s \in \otimes^{k+l} V^* \tag{16.41}$$

definiert $\forall\, v_1, \dots, v_{k+l} \in V$ durch

$$(t \otimes s)(v_1, \dots, v_{k+l}) := t(v_1, \dots, v_k) \cdot s(v_{k+1}, \dots, v_l) \tag{16.42}$$

3. Eine Basis für $\otimes^k V^*$ ist gegeben durch

$$\{e^*_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{i_k} | 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\} \tag{16.43}$$

Beweis (2. ist Übung)
Zu 3. : Beweis per Vollständiger Induktion über k.

Induktionsanfang $\underline{k=1} \otimes V^* = V^*$. Zu zeigen:

$$\{e_1^*, \dots, e_n^*\} \text{ ist Basis von } V^* \tag{16.44}$$

Wir zeigen zunächst die lineare Unabhängigkeit, dass heißt falls

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*, \lambda_i \in \mathbb{R} \tag{16.45}$$

gilt, so folgt $\lambda_i = 0 \,\forall\, i$. Sei $j \in \{1, \dots, k\}$, dann gilt durch Anwenden auf e_j:

$$0 = O(e_j) = \Bigl(\sum_i = 1^n \lambda_i e_i^*\Bigr)(e_j) = \lambda_j \tag{16.46}$$

Also folgt die lineare Unabhängigkeit. Nun zeigen wir, dass die Menge ein Erzeugendensystem ist. Sei $\varphi \in V*$. Wir suchen ein $a_i \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\sum_{i=1}^{n} a_i e_i^* \overset{!}{=} \varphi \tag{16.47}$$

Sei $a_i \coloneqq \varphi(e_i) \in \mathbb{R}$, dann gilt $\forall j \in \{1, \dots, k\}$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} q_i e_i^*\right) e_j = \sum_{i=1}^{n} q_i e_i^* e_j \text{ und } \varphi(e_j) = a_j \tag{16.48}$$

Induktionsschritt $\underline{k \geq 1}$. Erneut zeigen wir zunächst die lineare Unabhängigkeit:

$$(e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^*)(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = e_{i_1}^* e_{j_1} \cdots e_{i_k}^* e_{j_k} \tag{16.49}$$

$$= \delta_{i_1, j_1} \cdots \delta_{i_k, j_k} \tag{16.50}$$

$$t = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \lambda_{i_1, \dots, i_k} e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^* \tag{16.51}$$

Also folgt die lineare Unabhängikeit. Nun wenden wir uns der Eigenschaft zu, Erzeugendensystem zu sein:

$$t \in \otimes^k V^*, t(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) =: a_{j_1, \dots, j_k} \in \mathbb{R} \tag{16.52}$$

$$\tag{16.53}$$

Dem geneigten Leser bleibt es nun als Übung überlassen zu zeigen, dass

$$t = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} a_{j_1, \dots, j_k} e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^* \tag{16.54}$$

gilt.

16.9.9.1 Korollar über die Dimension von $\mathbb{R}^{\otimes^k V^*}$

$$\dim(\mathbb{R}^{\otimes^k V^*}) = n^k \tag{16.55}$$

16.9.10 Beobachtung über die Wirkung der symmetrischen Gruppe auf den Raum der $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen

Die symmetrische Gruppe S_k wirkt auf $\otimes^k V^*$ für:

$$t \in \otimes^k V^*, \zeta \in S_k,\ v_1, \ldots, v_k \in V \tag{16.56}$$

mittels:

$$(\zeta(t))(v_1, \ldots, v_m) := t(v_{\zeta(1)}, \ldots, v_{\zeta(k)}) \tag{16.57}$$

16.9.10.1 Beispiel

$$k = 2, S_2 = \{\mathrm{Id}, \tau\} \text{ mit } \tau(1) = 2, \tau(2) = 1 \tag{16.58}$$

$$\tau(t)(v_1, v_2) = t(v_{\tau(1)}, v_{\tau(2)}) = t(v_2, v_1) \tag{16.59}$$

16.9.10.2 Übung

1. $\zeta(t) \in \otimes^k V^*$
2. $\zeta, \tau \in S_k \Rightarrow \zeta(\tau(t)) = \underbrace{(\zeta \circ \tau)}_{\text{Nullteiler in } S_k}(t)$

16.9.11 Lemma über die Anwendung eines Gruppenhomomorphismus auf eine symmetrische Abbildung

Sei $X\colon S_k \to \mathbb{R} \setminus 0$ Gruppenhomomorphismus. Dann gilt entweder

$$X(\zeta) = 1 \,\forall\, \zeta \in S_k \tag{16.60}$$

oder

$$X(\zeta) = \mathrm{sgn}(\zeta) = (-1)^r, \zeta = \tau_1 \cdots \tau_r \tag{16.61}$$

wobei τ_j die Transposition für alle j bezeichnet.

16.9.12 Definition der (Anti)-Symmetrie für den Raum der $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen

1. t heißt genau dann *symmetrisch*, wenn für alle $\zeta \in S_k$ gilt, dass $\zeta(t) = t$. Wir schreiben dann:
$$S^k V^* := \{t \in \otimes^k V^* | t \text{ symmetrisch } \} \tag{16.62}$$
2. t heißt genau dann *antisymmetrisch*, wenn für alle $\zeta \in S_k$ gilt, dass $\zeta(t) = \mathrm{sgn}(\zeta(t))$. Wir schreiben dann:
$$\Lambda^k V^* := \{t \in \otimes^k V^* | t \text{ antisymmetrisch } \} \tag{16.63}$$

16.9.12.1 Bemerkung über die Vektorraum- bzw Unterraumeigenschaften
$\otimes^k V^*$ ist $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Unterräumen $S^k V^*$ und $\Lambda^k V^*$.

16.9.12.2 Beispiele...

1. ... für Symmetrie:

$$\mathbb{K}^k \times \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto s(x, y) = x^t y \tag{16.64}$$

2. ... für Trilinearität und Antisymmetrie:

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto s(x, yxz) = \langle x, yxz \rangle \tag{16.65}$$

3. ... für n-Linearität und Antisymmetrie:

$$\underbrace{\mathbb{K}^k \times \cdots \times \mathbb{K}^k}_{n-\text{mal}} \to \mathbb{K}, (x, y, z)(v_1, \ldots, v_n) \mapsto \det((v_1, \ldots, v_n)) \tag{16.66}$$

16.9.13 Definition des Alternators

Die Abbildung

$$\mathrm{Alt}^k = \mathrm{Alt}\colon \otimes^k V^* \to \otimes^k V^* \tag{16.67}$$

$$t \mapsto \mathrm{Alt}(t) := \frac{1}{k!} \sum_{\zeta \in S_k} \mathrm{sgn}(\zeta)\zeta(t) \tag{16.68}$$

heißt *Antisymmetrationsoperator* oder *Alternator*.

16.9.14 Lemma über die Eigenschaften des Alternators

1. Es gilt für alle $t \in \otimes^k V^*$:

$$\mathrm{Alt}(t) \in \Lambda^k V^* \subset \otimes^k V^* \tag{16.69}$$

2. Weiterhin gilt:

$$\mathrm{Alt} \circ \mathrm{Alt} = \mathrm{Alt} \tag{16.70}$$

Beweis

1. Seien $\mu \in S_k, t \in \otimes^k V^*$. Es ist zu zeigen, dass dann folgt:

$$\mu(\mathrm{Alt}(t)) = \mathrm{sgn}(\mu)\mathrm{Alt}(t) \tag{16.71}$$

da $|S_k| = k!$ gilt folgt mit $\text{sgn}(\mu) \in \{-1, 1\}$:

$$\mu(\text{Alt}(t)) = \mu\left(\frac{1}{k!}\sum_{\zeta \in S_k} \text{sgn}(\zeta)\zeta(t)\right) \tag{16.72}$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{\zeta \in S_k} \text{sgn}(\zeta)\mu(\zeta(t)) \tag{16.73}$$

$$= \text{sgn}(\mu)\frac{1}{k!}\sum_{\zeta \in S_k} \text{sgn}(\mu)\text{sgn}(\zeta)\zeta(t) \tag{16.74}$$

$$= \text{sgn}(\mu)\frac{1}{k!}\sum_{\zeta \in S_k} \text{sgn}(\underbrace{\mu \circ \zeta}_{\tau})(\mu \circ \zeta)(t) \tag{16.75}$$

$$= \text{sgn}(\mu)\frac{1}{k!}\sum_{\zeta \in S_k} \text{sgn}(\tau)(\tau)(t) = \text{sgn}(\mu)\text{Alt}(t) \tag{16.76}$$

2. analog.

16.9.14.1 Beispiel eines Alternators Sei $\varphi \otimes \psi \in \otimes^2 V^*$ mit $\varphi, \psi \in V* = \otimes^1 V^*$. Dann gilt:

$$\text{Alt}(\varphi \otimes \psi) = \frac{1}{2!}\sum_{\zeta \in S_2} \text{sgn}(\zeta)\mu(\zeta(\varphi \otimes \psi)) = \frac{1}{2}(\varphi \otimes \psi - \psi \otimes \varphi) \tag{16.77}$$

16.9.15 Definition des Dachproduktes

Seien $\alpha \in \otimes^k V^*, \beta \in \otimes^l V^*$, dann heißt

$$\frac{(k+l)!}{k!l!}\text{Alt}(\alpha \otimes \beta) =: t \wedge s \tag{16.78}$$

das *Dachprodukt von α mit β*.

Problem Was ist $\varphi \wedge \psi \wedge \chi$? Gilt $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ oder $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$?

16.9.16 Lemma über die Eigenschaften des Dachproduktes

Seien $\alpha \in \otimes^k V^*, \beta \in \otimes^l V^*, \gamma \in \otimes^m V^*$. Dann gelten:

1. $\alpha \wedge \beta = \text{Alt}(\alpha) = \alpha \wedge \text{Alt}(\beta) = \text{Alt}(\alpha) \wedge \text{Alt}(\beta)$
2. "$\wedge$" ist $\mathbb{R}$-bilinear.
3. $\beta \wedge \alpha = (-1)^{kl}\alpha \wedge \beta$
4. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$

Beweis

1. $\underline{\alpha \wedge \beta = \mathrm{Alt}(\alpha) \wedge \beta}$

$$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\alpha) \otimes \beta) = \mathrm{Alt}\left(\left(\frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma(\alpha)\right) \otimes \beta\right) \tag{16.79}$$

$$= \frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}(\mu)\left(\frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\mu(\sigma(\alpha) \otimes \beta)\right) \tag{16.80}$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k}\left(\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\mu \in S_k + l} \underbrace{\mathrm{sgn}(\mu)\mathrm{sgn}(\sigma)}_{\mathrm{sgn}(\mu\circ\sigma')}\mu(\underbrace{\sigma(\alpha) \otimes \beta}_{\sigma'(\alpha\otimes\beta)})\right) \tag{16.81}$$

Wobei für $\sigma \in S_k$ gilt:

$$\sigma'(j) = \begin{cases} \sigma(j), & \text{für } 1 \leq j \leq k \\ j, & \text{für } k+1 \leq j \leq k+l \end{cases} \tag{16.82}$$

Also folgt weiter aus obigen Term:

$$=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k}\left(\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\mu\sigma' \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}(\mu \circ \sigma')(\mu \circ \sigma')(\alpha \otimes \beta)\right) \tag{16.83}$$

$$\frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k}(\mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta)) = \frac{1}{k!}k!(\mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta)) = \mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta) \tag{16.84}$$

$\underline{\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge \mathrm{Alt}(\beta) = \mathrm{Alt}(\alpha) \wedge \mathrm{Alt}(\beta)}$

$$\alpha \wedge \beta = \mathrm{Alt}(\alpha) \wedge \beta = \alpha' \wedge \beta = \alpha' \wedge \mathrm{Alt}(\beta) = \mathrm{Alt}(\alpha) \wedge \mathrm{Alt}(\beta) \tag{16.85}$$

2. $\otimes\colon \otimes^k V^* \times \otimes^l V^* \to \otimes^{k+l} V^*$ ist $\mathbb{K}$-linear und der Alternator ist $\mathbb{K}$-1-linear. Daher ist

$$\wedge\colon \otimes^k V^* \times \otimes^l V^* \to \otimes^{k+l} v^* \tag{16.86}$$

$\mathbb{K}$-bilinear.

3. Es seien $v_1, \dots, v_{k+l} \in V$. Dann gilt:

$$(\beta \otimes \alpha)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \beta(v_1, \dots, v_l)\alpha(v_{l+1}, \dots, v_{l+k}) \tag{16.87}$$

$$= (\alpha \otimes \beta)(v_{l+1}, \dots, v_{k+l}, v_1, \dots, v_l) \tag{16.88}$$

$$= (\alpha \otimes \beta)(v_{\mu_{l,k(1)}}, \dots, v_{\mu_{l,k(k)}}, v_{\mu_{l,k(k+1)}}, \dots, v_{\mu_{l,k(k+l)}}) \tag{16.89}$$

wobei $\mu_{l,k} \in S_{k+l}$ eindeutig durch die Gleichung (16.89) definiert ist. Es gilt

$$\mathrm{sgn}(\mu_{l,k}) = (-1)^{lk} \tag{16.90}$$

Der Beweis der Behauptung bleibt dem geneigten Leser als Übung überlassen. Als Hinweis sei gesagt, dass der Beweis per Induktion erfolgen sollte.
Es gilt also:

$$\beta \otimes \alpha = \mu_{l,k}(\alpha \otimes \beta) \tag{16.91}$$

und es folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}(\beta \otimes \alpha) =& \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\tau \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}(\tau)\tau(\beta \otimes \alpha) && (16.92)\\
=& \frac{\mathrm{sgn}(\mu_{l,k})}{(k+l)!} \sum_{\tau \in S_{k+l}} \underbrace{\mathrm{sgn}(\tau)\mathrm{sgn}(\mu_{k,l})}_{\mathrm{sgn}(\tau \circ \mu_{l,k})} \underbrace{\tau(\mu_{k,l}(\alpha \otimes \beta))}_{\tau \circ \mu_{l,k}} && (16.93)\\
=& \mathrm{sgn}(\mu_{l,k})\mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta) && (16.94)
\end{aligned}$$

4. Der Beweis bleibt dem geneigten Leser als Übung überlassen.

16.9.17 Bemerkung über die mehrfache Ausführung des Dachproduktes

Wir definieren für $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \otimes^k V^*$

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k := (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_{k-1}) \wedge \varphi_k \tag{16.95}$$

und erhalten

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k = k!(\mathrm{Alt}(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_k)) \tag{16.96}$$

Der Beweis bleibt dem geneigten Leser als Übung überlassen.

16.9.18 Korollar über eine Basis des Raumes der antisymmetrischen $\mathbb{K}$-linearen Abblidungen

Es sei $\{e_1, \ldots, e_m\}$ eine Basis von V mit Dualbasis $\{e_1^*, \ldots, e_m^*\}$. Dann ist

$$\{e_1^* \wedge \cdots \wedge e_m^* | 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m\} \tag{16.97}$$

Basis von $\Lambda^k V^*$.

Beweis Das die Menge Erzeugendensystem ist ist klar, da (16.97) Basis von $\otimes^k V^*$ und Alt: $\otimes^k V^* \to \Lambda^k V^*$ surjektiv ist. Nun bleibt nur noch die lineare Unabhäbigkeit zu zeigen. Sei $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m$. Dann gilt

$$(e_{j1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*)(e_{j1}, \ldots, e_{jk}) = k!\mathrm{Alt}(e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^*)(e_{j1}, \ldots, e_{jk}) \tag{16.98}$$

$$\sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma(e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^*)(e_{j1}, \ldots, e_{jk}) \tag{16.99}$$

Da aber nur $\sigma =$Id sein kann, da sonst nicht mehr monoton steigend, folgt im obigen Term:

$$(e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^*)(e_{j1}, \ldots, e_{jk}) = \delta_{i1,j1} \cdots \delta_{ik,jk} \tag{16.100}$$

Also folgt die lineare Unabhängigkeit.

16.9.19 Korollar über Dimensionen des Raumes der antisymmetrischen $\mathbb{K}$-linearen Abblidungen und der Grassmann-Algebra

Es sei $\dim(V) = m$. Dann folgt aus $k > m$

$$\Lambda^k V^* = \{0\} \tag{16.101}$$

und aus $0 \leq k \leq m$ folgt:

$$\dim(\Lambda^k V^*) = \binom{m}{k} \tag{16.102}$$

und die *Grassmann-Algebra*:

$$\Lambda^k V^* \coloneqq \bigoplus_{k=0}^{m} \Lambda^k V^* \tag{16.103}$$

hat Dimension 2^m.

16.9.20 Definition des Pullbacks

Es seien U und V $\mathbb{K}-$Vektorräume, $T\colon U \to V$ $\mathbb{K}-$linear, $m \in \Lambda^k V^*$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann bezeichnen wir den *Pullback* T mit:

$$T^*(m)(u_1, \ldots, u_k) \coloneqq m(T(u_1), \ldots, T(u_k)) \tag{16.104}$$

16.9.21 Lemma über die Eigenschaften des Pullbacks

Es seien U, V, T, k wie oben. Dann gelten:

1. $T^*\colon \otimes^k V^* \to \otimes^k V^*$ ist $\mathbb{K}$-linear.
2. $T^*(\Lambda^k V^*) \subseteq \Lambda^k U^* \subseteq \otimes^k U^*$ mit $\Lambda^k V^* \subseteq \otimes^k V^*$.
3. $T^*(\alpha \wedge \beta) = T^*(\alpha) \wedge T^*(\beta)\,\forall\, \alpha \in \Lambda^k V^*, \forall \beta \in \Lambda^l V^*$
4. Sei $S\colon V \to W$ eine weitere $\mathbb{K}$-lineare Abbildung. dann gilt:

$$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*\colon\ \otimes^k V^* \to \otimes^l V^* \tag{16.105}$$

Der Beweis bleibt dem geneigten Leser als Übung überlassen.

16.9.22 Definition und Proposition über die Determinante des Pullbacks

Es seien V ein m-dimensinaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $T\colon V \to V$ linear. Dann existiert genau ein Element $\det(T) \in \mathbb{K}$ mit

$$T^*(\Omega) = \det(T)\Omega,\ \forall\, \Omega \in \Lambda^m V^* \tag{16.106}$$

Beweisidee Der Beweis bleibt dem geneigten Leser als Übung überlassen, als Idee betrachte man, dass $\Lambda^m V*$ eindimensional ist und daher $\{\Omega\}$ eine Basis für $\Lambda^m V^*$ ist. Wenn E eindimensionaler $\mathbb{K}-$Vektorraum ist und $L\colon E \to E$ $\mathbb{K}-$linear ist, dann ist $L(e) = \lambda e$ für alle $e \in E$ und ein festes $k \in \mathbb{K}$. Dann ist

$$T^*\colon \Lambda^m V^* \to \Lambda^m V^*$$

durch Multiplikation mit einem festen $\lambda \in \mathbb{K}$ gegeben. Wir nennen $\lambda =\colon \det(T)$.

16.9.23 Lemma über die Eigenschaften der Determinante

Es seien V ein m-dimensinaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $T, S\colon V \to V$ linear. Dann gelten:

1. $\det(S \circ T) = \det(S)\det(T)$
2. T ist genau dann invertierbar, wenn $\det(T) \neq 0$.
3. Wenn $V = \mathbb{K}^n$ und $T = F_A$ für ein $A \in GL(m, \mathbb{K})$, dann gilt $\det(T) = \det(F_A)$

Der Beweis bleibt dem geneigten Leser als Übung überlassen.

16.9.24 Definition der Volumenform

1. Es sei V ein m-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine *Volumenform auf V* ist ein $\Omega \in \Lambda^m V^* \setminus \{0\}$.
2. Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dann nennen wir eine Volumenform auch eine Orientierungsform.

16.9.24.1 Beispiel für eine Orientierungsform Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}, m = 2, 3$.
$\underline{m = 2:}$
$V = \mathbb{R}^2, \Omega = e_1^* \wedge e_2^*$ wobei e_i der i-te Einheitsvektor und $\{e_1, e_2\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$ ist. Dann gilt

$$(e_1^* \wedge e_2^*)(e_1, e_2) = 1 \tag{16.107}$$

und allgemein:

$$(e_1^* \wedge e_2^*)(e_1, e_2) = \mathrm{Vol}_{\mathrm{or}} \tag{16.108}$$

$\underline{m = 3:}$

$$V = \mathbb{R}^3, \mathrm{Vol}_{\mathrm{or}}(P(v_1, v_2, v_3)) = \Omega(v_1, v_2, v_3) \tag{16.109}$$
$$\Omega := e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* \tag{16.110}$$

16.9.25 Definitonen über Orientierungen und Orientierungsformen

Sei V ein m-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

1. Zwei Orientierungsformen Ω', Ω'' auf V heißen *äquivalent* genau dann, wenn
$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^x \text{ und } \lambda > 0 \text{ mit } \Omega'' = \lambda \Omega' \tag{16.111}$$
wir schreiben dann $\Omega' \sim \Omega''$ oder $[\Omega'] = [\Omega'']$.
2. Eine *Orientierung von V* ist eine Äquivalenzklasse von Orientierungsformen auf V.
3. Ein *orientierter $\mathbb{R}$-Vektorraum* ist ein Paar $(V, [\Omega])$, wobei V wie oben und $[\Omega]$ eine Orientierung.
4. Eine angeordnete Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ eines orientierten Vektorraumes $(V, [\Omega])$ heißt *positiv (beziehungsweise negativ) orientiert ist* genau dann, wenn
$$\Omega(v_1, \ldots, v_m) \gtrless 0 \tag{16.112}$$

Bemerkung 4. ist wohldefiniert.

16.9.26 Lemma über die Orientierungen eines reellen Vektorraums

Sei V ein m-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, dann gelten:

1. V hat genau zwei Orientierungen.
2. Die Wahl einer angeordneten Basis von V definiert eine eindeutige Orientierung $[\Omega]$ von V, bezüglich der die Basis positiv orientiert ist.

Der Beweis ist dem geneigten Leser als Übung überlassen.

16.9.27 Definition von volumenerhaltenden bzw orientierungserhaltenden Pullbacks

Es seien V, W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und $T\colon V \to W$ $\mathbb{K}$-lienar, sowie Ω_V, Ω_W Volumenformen auf V beziehungsweise W.

1. T heißt genau dann *volumenerhaltend*, wenn $T^*\Omega_W = \Omega_V$.
2. Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und T Isomorphismus, dann heißt T genau dann *orientierungserhaltend*, wenn $[T^*\Omega_W] = [\Omega_V]$

16.9.27.1 Beispiele zu volumenerhaltend und orientierungserhaltend Seien $V = W = \mathbb{R}^2$ (oder $\mathbb{R}^m$) und $\Omega = e_1^* \wedge e_2^*$ mit zugehöriger Orientierung $[\Omega] = [e_1^* \wedge e_2^*]$. Weiter seien $A \in M(2, \mathbb{R})$ und $T_a\colon V \to W = V, x \mapsto Ax$. Dann gilt T_A genau dann vektorraumisomorph, wenn die Determinante von T ungleich 0 ist.

Erste Hilfsbehauptung

$$T_A^*\Omega = \Omega \Leftrightarrow \det(A) = 1 \tag{16.113}$$

$$(T_A^*\Omega)(e_1, e_2) = \alpha \in \mathbb{R} \tag{16.114}$$

Beweis der ersten Hilfsbehauptung:

$$T_A^*\Omega = \alpha\Omega, \alpha = \det(T_A) = \det(A) \tag{16.115}$$

$$(T_A^*\Omega)(e_1, e_2) = (\alpha e_1^* \wedge e_2^*)(e_1, e_2) = \alpha\{(e_1^* \wedge e_2^*)(e_1, e_2)\} = \alpha \tag{16.116}$$

Zweite Hilfsbehauptung $T_A^*[\Omega] \coloneqq [T_A^*\Omega]$ für T_A isomorph. Dann gilt:

$$[T_A^*\Omega] = \Omega \Leftrightarrow \det(A) > 0 \tag{16.117}$$

Der Beweis der zweiten Hilfsbehauptung ist dem geneigten Leser als Übung überlassen.

Es bleibt festzustellen, dass $SL(m, \mathbb{R})$ die *volumenerhaltenden linearen Isomorphismen von* $\mathbb{R}^m$ sind und, dass $GL^*(m, \mathbb{R})$ die *orientierungserhaltenden linearen Isomorphismen von* $\mathbb{R}^m$ sind.

16.10 Differentialformen auf offenen Mengen in $\mathbb{R}^m$

Wiederholung

1. Seien $U \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^m, a \in U, f\colon U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar (glatt) für $v \in \mathbb{R}^m$ haben wir:

$$D_v f(a) = (Df)(a)(v) \coloneqq \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \tag{16.118}$$

Die lineare Abbildung $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, v \mapsto (Df)(a)(v)$ ist die bestapproximierende lineare Abbildung (zu f in a), dass heißt, für alle $v \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$f(a+v) = f(a) + (Df)(a)(v) + O(\|v\|_\infty) \tag{16.119}$$

wobei $O(\|v\|_\infty)$ der Fehler der Abschätzung ist.

2. Seien $M \subset \mathbb{R}^m$ Untermannigfaltigkeit (zum Beispiel $M = U$) und $a \in M$, dann ist:

$$\mathbb{R}^m \supseteq T_a M \coloneqq \{v \in \mathbb{R}^m |\, \exists\, \alpha\colon]-\varepsilon, \varepsilon[\to M \text{ diff'bar und } \alpha(0) = a, \alpha'(0) = v\} \tag{16.120}$$

sei nun $f\colon M \to \mathbb{R}$ differenzierbar (das heißt $\exists \tilde{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\tilde{f}|_M = f$). Wir haben

$$T_a f\colon T_a M \to T_{f(a)}\mathbb{R} = \mathbb{R} \tag{16.121}$$

und

$$(T_a f)(v) = \frac{d}{dt}|_0 f \circ \alpha(t) = (D\tilde{f})(a)(v) \tag{16.122}$$

16.10.1 Beobachtung

Sei $M = U$ offen in $\mathbb{R}^m, a \in U \Rightarrow T_a U = \mathbb{R}^m$. Für $v \in \mathbb{R}^m, \alpha(t) = a + tv$, mit Eigenschaften $\alpha(0) = a, \alpha'(0) = v$, ist α jedoch im Allgemeinen keine Tangentialkurve.

16.10.2 Definition von Differentialformen beziehungsweise k-Formen.

Sei U offen in $\mathbb{R}^m$ und $k \in \mathbb{N}$. Eine *Differentialform der Ordung* k *(oder kurz:* k*-Form) auf* U ist eine Abbildung

$$\omega\colon M \to \dot{\bigcup_a} \in U \Lambda^k T_a^* M \tag{16.123}$$

mit $\omega(a) \in \Lambda^k T_a^* U$, wobei $T_a^* U = (T_a U)^*$. Wir nennen Funktionen auf U auch *O-Formen auf* U.

16.10.3 Betrachtung über die kanonische und Dualbasis des Tangentialvektorraums

Der Vektorraum T_aU hat kanonische Basis $\{e_1, \dots, e_m\}$ die wir

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_a, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\bigg|_a \right\} \tag{16.124}$$

schreiben. Wir schreiben $(dx_i)(a) = (dx_i)_a$ für die Dualbasis von T_a^*U, dass heißt

$$(dx_i)_a \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_a \right) = \delta_{i,j} \tag{16.125}$$

Für die $\mathbb{R}$-*wertigen Funktionen auf* U beziehungswesie die *Koeffizientfunktionen von* ω $f_{i_1,\dots,i_k}$ und in a gilt:

$$\omega(a) = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le m} f_{i_1,\dots,i_k}(a)(dx_{i_1})_a \wedge \dots \wedge (dx_{i_k})_a \tag{16.126}$$

$$= \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le m} f_{i_1,\dots,i_k}(a)(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_a \tag{16.127}$$

Wir nennen ω genau dann *differenzierbar*, wenn alle Koeffizientenfunktionen differenzierbar sind.

16.10.3.1 Beispiel für ein differenzierbares Element des Tangentialraumes

$$\omega = cos(x_2)x_1dx_1 + e^{x_2 - x_1}dx_2 \tag{16.128}$$

16.10.4 Anwendung der multilinearen Algebra in der Analysis

$$M \ni p, T_pM = V, M \subset \mathbb{R}^n \tag{16.129}$$

$$T_PM = \{v \in \mathbb{R}^n \colon \ \exists\, v = \gamma'(0) \colon \gamma \colon]-c, c[\to M, \gamma(0) = p\} \tag{16.130}$$

16.10.5 Äußere Ableitung

$$\sum_I f_I dx_I \tag{16.131}$$

mit $dx_I = dx_{i_1}, \dots, dx_{i_n}$ n-Form.

16.10.5.1 Spezialfall der 0-Formen Sei U offen in $\mathbb{R}^m$. Eine Funktion $f \colon U \to \mathbb{R}$ mit $f \colon p \mapsto f(p) \in \mathbb{R}$ und

$$T_pU \underset{Df}{\to} T_{f(p)}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \tag{16.132}$$

heißt 0-*Form*

16.10.5.2 Erinnerung über die multilineare Algebra

Es sind:

- V Vektorraum.
- $\Lambda^k V^*$ die linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K}$.
- $\Lambda^1 V^* = V^*$ und $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$

16.10.5.3 Anwendung bei Untermannigfaltigkeiten

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Untermannigfaltigkeit und $p \in M$, dann sind

$$V = T_pM = \{v \in \mathbb{R}^n \colon\ \exists\, v = \gamma'(0) \colon \gamma \colon]-c, c[\to M, \gamma(0) = p\} \tag{16.133}$$

16.10.5.3.1 Spezialfall für offene Untermannigfaltigkeiten

Wenn $M \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, dann gilt für alle $p \in M$, dass $T_pM = \mathbb{R}^n$ ist.

16.10.6 Definition der Richtungsableitung

Sei $f \colon M \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $v \int T_pM$. Die *Richtungsableitung* $(Df)(v)_p$ wird folgendermaßen definiert:
Es gilt $c = (Df)(v)_p$ genau dann, wenn für jede differenzierbare Kurve $\gamma \colon]-d, d[$ mit $\gamma'(0) = v, \gamma(0) = p$ gilt:

$$c = \lim_{t \to 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(p)}{t} = \frac{d}{dt} f \circ g \tag{16.134}$$

In lokalen Koordinaten schreiben wir:

$$(Df) \colon (v_1, \ldots, v_m) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i, v = (v_1, \ldots, v_n) \tag{16.135}$$

Wir haben für festes f und p eine lineare Abbildung $v \to (Df)(v)_p$ von T_pM nach $\mathbb{R}$, also ein Element in $(T_pM)^* = T_p^*M$. Das heißt, wir erhalten für festes f

$$p \mapsto (df)_p \in T_p^*M \tag{16.136}$$

Eine k-Form ist eine Vorschrift, die jedem $p \in M$ ein Element in $\Lambda^k T_p^*M$ zuordnet. Also ist (Df) wie oben eine 1-Form.

16.10.7 Satz über die Basis und die duale Basis des Tangentialraumes in lokalen Koordianten

Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ und $x_1, \ldots, x_n$ Koordinaten. Dadurch erhalten wir eine Basis von T_pM:

$$T_pM = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle_{\mathbb{R}} \tag{16.137}$$

wobei

$$e_k = \gamma_k'(0) \text{ mit } \gamma_k(t) = p + t(0, \ldots, 0, \overset{k}{1}, 0, \ldots, 0) \tag{16.138}$$

Die Koordinaten x_i sind insbesondere differenzierbare Funktionen:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j \\ 1, & \text{falls } i = j \end{cases} \tag{16.139}$$

Also ist $dx_1, \ldots, dx_n$ die *duale Basis* zur Basis $e_1, \ldots, e_n$. Für eine differenzierbare Funktion f gilt:

$$(df)_p(v_1, \ldots, v_n) = (Df)_p(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i \tag{16.140}$$

Das heißt, in der durch das Koordinatensystem induzierten Basis ist die lineare Abbildung $(df)_p$ gegeben durch:

$$(df)_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) dx_i \tag{16.141}$$

16.10.8 Definition von Differentialformen (k-Formen)

Jedem p wird ein Element in $\Lambda^k T_p^* M$ zugeordnet, das heißt, wenn $x_1 \ldots, x_n \Rightarrow dx_1, \ldots, dx_n$ Basis von $T_p^* M$, dann lässt sich eine k-Form schreiben als:

$$\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx_I \tag{16.142}$$

mit

$$I = (i_1, \ldots, i_k), dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \tag{16.143}$$

16.10.9 Beispiel

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ offen und $k = 2$. Dann gilt:

$$\omega = \sum_{\substack{I=(i_1,\ldots,i_k) \\ i_1<\cdots<i_k}} f_I dx_I = f_{(1,2)} dx_1 \wedge dx_2 + f_{(1,3)} dx_1 \wedge dx_3 + f_{(2,3)} dx_2 \wedge dx_3 \tag{16.144}$$

Bemerkung ω heißt glatt beziehungsweise stetig, falls alle f_I glatt beziehungsweise stetig sind.

16.10.10 Definition der dualen Basis von ω

Sei $\omega = \sum_I f_i dx_I$, dann ist

$$d\omega := \sum_I (df_I) \wedge dx_I \tag{16.145}$$

16.10.11 Beispiel

$$\begin{aligned}
\omega =&(x_1x_2 + x_3)dx_2 && (16.146)\\
\Rightarrow d\omega =& d(x_1x_2 + x_3) \wedge dx_2 && (16.147)\\
=&\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3\right) \wedge dx_2 && (16.148)\\
=&(x_2dx_1 + x_1dx_2 + dx_3) \wedge dx_2 && (16.149)\\
=&x_2dx_1 \wedge dx_2 + x_1dx_2 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_2 && (16.150)\\
=&x_2dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 && (16.151)
\end{aligned}$$

weil $\wedge$ alternierend folgt $dx_2 \wedge dx_2 = 0, dx_3 \wedge dx_2 = -dx_2 \wedge dx_3$

16.10.12 Ausblick auf den Satz von Stokes

Für eine Untermannigfaltigkeit M, ihrem Rand ∂M und ω k-Form soll gelten:

$$\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_{M} d\omega = \int\limits_{a}^{b} f'(t)dt = f(a) - f(b)\text{"} = \int\limits_{\partial M} \omega\text{"}, \omega = f \qquad (16.152)$$

16.10.13 Definition des Raumes der Differentialformen

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist

$$\begin{aligned}
\Omega^k M =&\{\omega \text{ ist glatte } k\text{-Form }\} && (16.153)\\
=&\{\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx_I, f_I \in \mathcal{C}^\infty(M)\} && (16.154)
\end{aligned}$$

der *Raum der Differentialformen über* M.

16.10.14 Satz über die Eigenschaften von der Dualabbildung

1. d ist linear mit $d\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$
2. Für $\omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M)$ gilt:

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta) \qquad (16.155)$$

Spezialfall $k = 0$ Im Fall $k = 0$ sind ω, η Funktionen und es gilt:

$$d(\omega\eta) = (d\omega)\eta + \omega(d\eta) \qquad (16.156)$$

3. $\forall \omega \in \Omega^k(M)\colon d(dw) = 0$
4. Für $F\colon M \to N$ differenzierbar und $M, N \subset \mathbb{R}^n$ offen gilt:

$$\omega \in \Omega^k(N)\colon d(F^*\omega) = F^*(d\omega) \qquad (16.157)$$

Beweis Seien

$$\omega = \sum_I f_I dx_I, \eta = \sum_J g_J dx_J \tag{16.158}$$

Wegen der Linearität können wir o.B.d.A.

$$\omega = f_I dx_I, \eta = g_J dx_J \tag{16.159}$$

setzten. Setze $f\colon f_I, g\colon g_J$

1. Bleibt dem geneigten Leser als Übung überlassen.
2. Es gilt:

$$\omega = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \eta = g dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \tag{16.160}$$

$$\Rightarrow d\omega = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_h} dx_h \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \tag{16.161}$$

$$d\eta = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_h} dx_h \wedge g dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \tag{16.162}$$

<u>Fall 1:</u>

$$\{i_1, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, \ldots, j_l\} \neq \emptyset \text{ das heißt} \tag{16.163}$$

$$\exists q\colon \exists r, s\colon i_r = j_s = q \tag{16.164}$$

Also gilt:

$$\omega \wedge \eta = dx_q \wedge dx_q \wedge \cdots = 0 \tag{16.165}$$

Analog gilt:

$$d\omega \wedge \eta = \omega \wedge d\eta = 0 \tag{16.166}$$

Also folgt:

$$d(\omega \wedge \eta) = 0 = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta) \tag{16.167}$$

<u>Fall 2:</u>

$$\{i_1, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, \ldots, j_l\} = \emptyset \tag{16.168}$$

Wir setzen:

$$S = \{1, \ldots, n\} \setminus (\{i_j, \ldots, i_k\} \cup \{j_1, \ldots, j_l\}) \tag{16.169}$$

Dann gilt:

$$d(\omega \wedge \eta) = d(fg dx_I \wedge dx_J) \tag{16.170}$$

$$= \sum_{h\in S} \frac{\partial(fg)}{\partial x_h} dx_h \wedge dx_I \wedge dx_J \tag{16.171}$$

weil $dx_h \wedge dx_I \wedge dx_J = 0 \,\forall\, h \notin S$. Also

$$d(\omega \wedge \eta) = \sum_{h\in S} \frac{\partial f}{\partial x_h} dx_h \wedge dx_I \wedge (g dx_J) \tag{16.172}$$

$$\omega \wedge (d\eta) = \sum_{h\in S} f dx_I \wedge \frac{\partial g}{\partial x_h} dx_h \wedge dx_J \tag{16.173}$$

Insgesamt also:

$$(d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta) \tag{16.174}$$

$$= \sum_{h\in S} (g \frac{\partial f}{\partial x_h} dx_h \wedge +dx_I + (-1)^k f \frac{\partial g}{\partial x_h} dx_I \wedge dx_h) \wedge dx_J \tag{16.175}$$

$$= \sum_{h\in S} \left(g \frac{\partial f}{\partial x_h} + f \frac{\partial g}{\partial x_h} \right) dx_h \wedge dx_I \wedge dx_J \tag{16.176}$$

weil dx_I eine k-Form ist und dx_h eine 1-Form ist und deshalb $dx_h \wedge dx_I = (-1)^{k \cdot 1} dx_I \wedge dx_h$ gilt. Weiter gilt:

$$= \sum_{h\in S} \frac{\partial(fg)}{\partial x_h} dx_h \wedge dx_I \wedge dx_J = d(\omega \wedge \eta) \tag{16.177}$$

3. Es gilt:

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I \tag{16.178}$$

$$d(d\omega) = \sum_{j=1}^{n} \sum i = 1^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I \tag{16.179}$$

Nach dem Satz von Schwarz gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \tag{16.180}$$

Anderseits gilt $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$. Also:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j = 0 \tag{16.181}$$

Insbesondere gilt für $i = j$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} dx_i \wedge dx_i = 0 \tag{16.182}$$

Daraus folgt

$$d(d\omega) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I = 0 \tag{16.183}$$

4. Vorbereitend benötigen wir erst folgendes Lemma:

Hilfslemma

Seien $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $W \subset \Omega^k(v)$ Untervektorraum so, dass gilt:

a) $f \in W \, \forall \, \mathcal{C}^\infty$-Funktion (= 0-Formen)$f$ auf V, das heißt $\Omega^0(v) \subset W$

b) Wenn $\omega \in W$ dann gilt $d\omega \in W$.

c) Wenn $\omega, \eta \in W$ dann gilt $\omega \wedge \eta \in W$.

Dann gilt:

$$W = \bigoplus_k \Omega^k(V) \tag{16.184}$$

<u>Beweis des Lemmas:</u>
Die Koordinatenfunktionen x_i sind $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen.

$$\overset{a)}{\Rightarrow} x_i \in W \, \forall \, i \tag{16.185}$$

$$\overset{b)}{\Rightarrow} dx_i \in W \, \forall \, i \tag{16.186}$$

$$\overset{c)}{\Rightarrow} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \in W \, \forall \, i_1, \ldots, i_k \tag{16.187}$$

$$\Rightarrow f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \, \forall \, f \, \forall \, i_1, \ldots, i_k \tag{16.188}$$

Da f $0-$Form ist und damit einem Skalar entspricht. Also folgt, dass fede Differentialform ω in W liegt, da W ein Untervektorraum ist, also $w_i \in W \Rightarrow \sum w_i \in W$

Nun setzen wir

$$W = \{\omega \in \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(V) \colon dF^* \omega = F^* d\omega\} \tag{16.189}$$

Ziel ist:

$$W = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(V) \tag{16.190}$$

Erinnerung:

$$p \in W \Rightarrow F(p) \in V, \quad T_P U \overset{(DF)_p}{\rightarrow} T_{F(p)} V \tag{16.191}$$

das heißt, wenn f eine Funktion ist, dann gilt:

$$(F * f)(p) = f(F(p)) = (f \circ F)(p) \tag{16.192}$$

Wenn ω1-Form, dann gilt:

$$(DF)_p \colon T_p U \rightarrow T_{f(p)} V \tag{16.193}$$
$$(DF)_p^* \colon T_p V^* \rightarrow T_{f(p)} U * \text{ duale Abbildung} \tag{16.194}$$
$$(F^*\omega)_p = (DF)_p^* \omega_{F(p)} \tag{16.195}$$

Für eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $f \colon V \rightarrow \mathbb{R}$ haben wir:

$$Df \colon T_q V \rightarrow \mathbb{R} = T_{f(a)} \mathbb{R} \tag{16.196}$$

das heißt, $(Df)_p$ definiert eine Linearform auf $T_q V$ nämlich $(df)_q \in T_q V^*$. Weiterhin gilt:

$$d(F * f) = d(f \circ F) \tag{16.197}$$

Für $p \in V$ ist $d(f \circ F)_p$ die durch $D(f \circ F)_p \colon T_p V \rightarrow \mathbb{R}$ definierte Linearform auf $T_p V$. Mit der Kettenregel folgt dann:

$$D(f \circ F)_p = (Df)_{F(P)} \circ (DF)_p \tag{16.198}$$

Weil

$$(F^* W)_p = (DF)_p^* W_{F(p)} \tag{16.199}$$

ist, gilt;

$$D(f \circ F)_p(v) = (DF)_{F(p)} \circ (DF)_p \tag{16.200}$$
$$\Rightarrow D(f \circ F)_p(v) = (DF)_{F(p)}((DF)_p(v)) = (DF)_p^*(Df)_{F(p)}(v) \tag{16.201}$$
$$= (F^* df)(v) \tag{16.202}$$

Also:

$$d(F^* f) = F^* df \tag{16.203}$$

das heißt, W erfüllt a).

Um b) ($\omega \in W \Rightarrow d\omega \in W$) zu zeigen folgern wir:

$$w \in W \Leftrightarrow d(F^*\omega) = F^*d\omega \tag{16.204}$$
$$F^*(d(d\omega)) = 0 \tag{16.205}$$

weil $dd\omega = 0$ ist.

$$d(F^*(d\omega)) = d(d(F^*\omega)) \text{ da} \tag{16.206}$$
$$\omega \in W \Rightarrow F^*(d\omega) = d(F^*\omega) = 0 \tag{16.207}$$

und es folgt $dd(F^*\omega) = 0$. Also gilt:

$$\omega \in W \Rightarrow F^*(d(d\omega)) = 0 = d(F^*d\omega) \tag{16.208}$$
$$\Rightarrow (F^*d)(d\omega)(d\omega) = (dF^*)(d\omega) \tag{16.209}$$

Nun zeigen wir c) ($\omega, \eta \in W \Rightarrow \omega \wedge \eta \in W$).
<u>Annahme:</u> $\omega \in \Omega^k(V)$. Dann gilt:

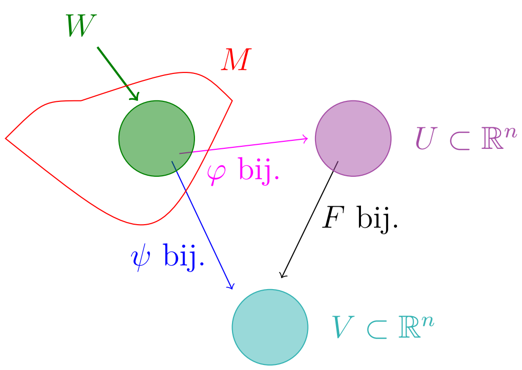
$$F^*(d(\omega \wedge \eta)) = F^*((d\omega) \wedge \eta + (-1)^k)\omega \wedge d\eta \tag{16.210}$$
$$\text{da } F^* \text{ linear} \rightarrow = F^*(d\omega \wedge \eta) + F^*(\omega \wedge d\eta)(-1)^k \tag{16.211}$$
$$\text{multilin. Algebra} \rightarrow = (F^*d\omega) \wedge (F^*\eta) + (F^*\omega) \wedge (F^*\omega) \wedge (F^*d\eta)(-1)^k \tag{16.212}$$
$$\text{weil } \omega, \eta \in W \rightarrow = (dF^*\omega) \wedge (F^*\eta) + (F^*\omega) \wedge (dF^*\eta)(-1)^k \tag{16.213}$$
$$= d((F^*W) \wedge (F^*\eta)) = dF^*(\omega \wedge \eta) \tag{16.214}$$
$$\Rightarrow \omega \wedge \eta \in W \tag{16.215}$$

Also erfüllt W die geforderten Eigenschaften des Hilfslemmas und es gilt:

$$W = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(V) \text{ sowie} \tag{16.216}$$
$$dF * \omega = F^*d\omega \;\forall\, w \tag{16.217}$$

16.10.15 Fazit

Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen haben wir $d\colon \Omega^k \to \Omega^{k+1}$ definiert und diverse Eigenschaften gezeigt.



16.10.16 Definition der Dualabbildung einer Differentialform

Seien $\omega \in \Omega^k(M), M \subset \mathbb{R}^N$ Untermannigfaltigkeit. Wir definieren $d\omega \in \Omega^k + 1(M)$ durch lokale Koordinaten, das heißt, für $p \in M$ wähle offene Umgebung W von p in M mit Diffeomorphismus $\varphi\colon W \to U \subset \mathbb{R}$ offen. Dann ist

$$d\omega\Big|_W := \varphi^* d((\varphi)^{-1}\omega) \tag{16.218}$$

16.10.17 Satz über die Wohldefiniertheit der Dualabbildung

In der Situation der Definition 16.10.16 ist d wohldefiniert.

Beweis Seien $\varphi\colon W \to U \subset \mathbb{R}^n$, $\psi\colon W \to V \subset \mathbb{R}^n$ Diffeomorphismen und $\omega \in \Omega^k(W)$.
Zu zeigen:

$$\varphi^* d(\varphi^{-1})^*(\omega) = \psi^*(d\psi^{-1})^*(\omega) \tag{16.219}$$

Definiere $F\colon \psi \circ (\varphi^{-1})\colon U \to V$.
Zwischenüberlegung:
Aus der Kettenregel folgt für alle Abbildungen G, H:

$$D(G \circ H) = (DG) \circ (DH) \tag{16.220}$$

$$\Rightarrow (G \circ H)^* = H^* \circ G^* \tag{16.221}$$

Also:

$$\varphi^* d(\varphi^{-1})\omega = (F^{-1} \circ \psi)^* d((F^{-1}\circ)^{-1})^*\omega \tag{16.222}$$

Da $\varphi = F^{-1} \circ \psi$.

$$= \psi^*(F^{-1}) dF^*(\psi^{-1})\omega \tag{16.223}$$

Da $(\psi^{-1})^*\omega \in \Omega^k(V)$ mit $V \subset \mathbb{R}^n$ offen folgt:

$$= \psi^*(F^{-1})F^* d(\psi^{-1})\omega \tag{16.224}$$

$$= \psi^*(F \circ F^{-1})^* d(\psi^{-1})\omega \tag{16.225}$$

$$= \psi^* d(\psi^{-1})\omega \tag{16.226}$$

16.10.18 Satz über die Eigenschaften der Dualabbildung auf Untermannigfaltikeiten

Seien M eine Untermannigfaltigkeit, $\omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M)$. Dann gilt:

1. $dd\omega = 0$
2. Wenn N eine Untermannigfaltigkeit ist und $F\colon N \to M\mathcal{C}^\infty$, dann gilt $dF^*\omega = F^* d\omega$.
3. $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$

Der Beweis bleibt dem geneigten Leser als Übung überlassen mit den Hinweis, man möge mit Karten rechnen.

16.10.18.1 Beispiel für F^* Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F\colon U \to V$ Diffeomorphismus, $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Was ist $F^*\omega$? Klar ist: es existiert eine Funktion $h\colon F^*w = hdx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Weiterhin gilt

$$F^*dx_i = dF^*x_i = dF_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial x_j} dx_j \tag{16.227}$$

$$\Rightarrow F^*\omega = (F^*dx_1) \wedge \cdots \wedge (F^*dx_n) \tag{16.228}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_n}{\partial x_k} dx_k \right) \tag{16.229}$$

Aber es gilt:

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n} = 0 \tag{16.230}$$

falls $j \neq k\colon i_j = i_k$ weil dann $dx_{i_j} \wedge dx_{i_k} = 0$. Also folgt

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_1} \neq 0 \tag{16.231}$$

nur dann, wenn $(i_1, \dots, i_n)$ Permutation von $(1, \dots, n)$ ist. Deshab gilt:

$$F^*\omega = \sum_{\sigma \in S_n} \frac{\partial F_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_{\sigma(n)}} dx_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(n)} \tag{16.232}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \frac{\partial F_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_{\sigma(n)}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \mathrm{sgn}(\sigma) \tag{16.233}$$

$$= \det(\mathrm{Jac}(F)) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \tag{16.234}$$

mit $\mathrm{Jac}(F)_{i,j} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$

16.10.19 Bemerkung zum Verhalten des Pullbacks unter Diffeomorphismen und glatten Funktionen

Sei $\varphi\colon U \to V$ Diffeomorphismus, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und f glatt auf V. Es gilt:

$$\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \Rightarrow \varphi^*\omega = \det(\mathrm{Jac}\varphi)\omega \tag{16.235}$$

Dann gilt:

$$\varphi^*(f(x))dx_1 \wedge dx_n) = (f \circ \varphi)(x) \det(\mathrm{Jac}\varphi) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \tag{16.236}$$

16.10.20 Definition der Integierbarkeit einer Differentialform

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ Funktion und $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Dann heißt ω *integrierbar*, falls f integrierbar nach Lebesgue ist und wir definieren das Integral als:

$$\int_U \omega \coloneqq \int_U f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \Leftarrow \text{ Lebesgue-Integral} \tag{16.237}$$

16.10.21 Definition von orientierungserhaltenden Dieffeomorphismen

Sei $\varphi\colon U \to V$ Diffeomorphismus und $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, dann heißt φ genau dann orientierungserhaltend, wenn die Determinatne der Jacobimatrix von φ größer als Null für alle x ist.

16.10.22 Satz

Sei $\varphi\colon U \to V$ orientierungserhaltender Diffeomorphismus, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und ω integrierbare n-Form. Dann gilt, dass $\varphi^*\omega$ integrierbar ist mit

$$\int\limits_U \varphi^*\omega = \int\limits_V \omega \tag{16.238}$$

Beweis Sei $f\colon V \to \mathbb{R}$ so, dass $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Es gelten:

1. Integral von ω:
$$\int\limits_V \omega = \int\limits_V f(x) d(x_1, \dots, x_n) \tag{16.239}$$
2. Transformationsformel:
$$\int\limits_V f(x) d(x_1, \dots, x_n) = \int\limits_U (f \circ \varphi)(x) |\det(\mathrm{Jac}\varphi)| d(x_1, \dots, x_n) \tag{16.240}$$
3. Orientierung des Pullbacks:
$$\varphi^*\omega = (f \circ \varphi)(x) \det(\mathrm{Jac}\varphi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \tag{16.241}$$

Und es folgt insgesamt:

$$\int\limits_V \omega = \int\limits_V f(x) d(x_1, \dots, x_n) = \int\limits_U (f \circ \varphi)(x) |\det(\mathrm{Jac}\varphi)| d(x_1, \dots, x_n) \tag{16.242}$$

Da φ orientierungserhaltend ist folgt weiterhin:

$$= \int\limits_U (f \circ \varphi)(x) \det(\mathrm{Jac}\varphi) d(x_1, \dots, x_n) = \int\limits_U \varphi^*\omega \tag{16.243}$$

Bemerkung Für orientierungumkehrende Diffeomorphismen φ, das heißt, falls

$$\det(\mathrm{Jac}(\varphi)) < 0 \tag{16.244}$$

gilt, so folgt:

$$\int\limits_V \omega = -\int\limits_U \varphi^*\omega \tag{16.245}$$

16.10.23 Lemma

Wenn $A \in GL_n(\mathbb{R}), a_1, \ldots, a_n$ positiv orientierte Basis, dann ist $A \cdot a_1, \ldots A \cdot a_n$ genau dann positiv orientiert, wenn $\det A > 0$.
Der Beweis bleibt dem geneigten Leser als Übung überlassen.

16.10.24 Definition

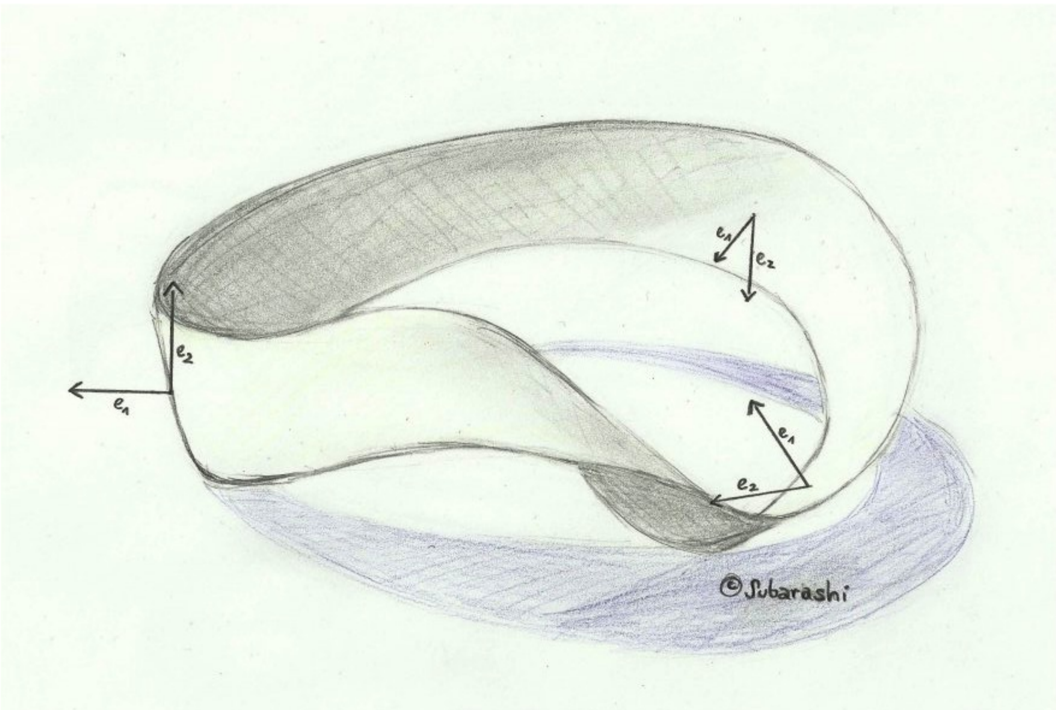
Eine *orientierte Untermannigfaltigkeit* $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Untermannigfaltigkeit, sodass jeder Tangentialraum T_pM mit $p \in M$ eine Orientierung besitzt, die stetig von p abhängt.

Alternative Definition Wenn $U \subset M$ offen und $v_1 \ldots v_d \colon U \to \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen mit $v_i(p) \in T_pM \; \forall \, p \in U$ sind und $v_1(p), \ldots, v_d(p)$ bilden eine Basis von $T_pM \forall p$. Dann ist entweder:

- $(v_1(p), \ldots, v_d(p))$ positiv orientierte Basis von $T_pM \; \forall \, p \in U$, oder
- $(v_1(p), \ldots, v_d(p))$ negativ orientierte Basis von $T_pM \; \forall \, p \in U$.

Bemerkung über Orentierungsformen Eine d-Form ohne Nullstellen ω auf M (auch genannt *Orientierungsform*) definiert eine Orientierung auf M. Das heißt, für ein $p \in M$ und eine Basis $(v_1, \ldots, v_d)$ gilt, dass $(v_1, \ldots, v_d)$ genau dann positiv orientiert ist, wenn $\omega(v_1, \ldots, v_d) > 0$ ist.

Bemerkung über Orientierungslosigkeit Es gibt Untermannigfaltigkeitenm für die keine Orientierung existiert, dass heißt sie sind *nicht orientierbar*.



16.10.25 Definition des Lebesgue-Integrals für Untermannigfaltigkeiten

Seien M eine orientierte Untermannigfaltigkeit mit $\dim(M) = d$, $U \subset M$ offen, $\varphi\colon U \to V$ orientierungserhaltender Diffeomorphismus, $V \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\omega \in \Omega^d(U)$. Dann gilt, dass ω genau dann auf U integrierbar ist, wenn $(\varphi^{-1})^*\omega$ auf V integrierbar mit

$$\int\limits_U \omega = \int\limits_V (\varphi^{-1})^*\omega \tag{16.246}$$

ist.

Bemerkung und Notation Die Standardorientierung auf $\mathbb{R}^n$ und gleichzeitig eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$ sind durch $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ gegeben, da die Standardbasis positiv orientiert ist.

16.10.26 Lemma über die Wohldefiniertheit des Integrals

$\int_U \omega$ ist wohldefiniert, das heißt unabhängig von der Wahl von ϕ und V.

Beweis Für $U \overset{\varphi}{\to} V$, $U \overset{\tilde{\varphi}}{\to} \tilde{V}$ und $U \xrightarrow{\tilde{\varphi}\circ\phi^{-1}} \tilde{V}$ folgt:

$$\int\limits_V (\varphi^{-1})^*\omega = \int\limits_{\tilde{V}} (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})^*(\varphi^{-1})^*\omega) \tag{16.247}$$

$$= \int\limits_{\tilde{V}} (\varphi^{-1} \circ \varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})^*\omega = \int\limits_{\tilde{V}} (\tilde{\varphi}^{-1})^*\omega \tag{16.248}$$

16.10.27 Allgemeine Situation

Wenn M orientierte Untermannigfaltigkeit und $\omega \in \Omega^d(M)$ sind, wollen wir $\int_M \omega$ definieren und betrachten für eine Indexmenge I und einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus φ:

$$\omega = \sum_{i\in I} \omega_i \colon\ \exists\, U_i \overset{\text{offen}}{\subset} M \tag{16.249}$$

$$\varphi_i \colon U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^d \colon \{x \in M \colon w_i(x) \neq 0\} \subset U_i \tag{16.250}$$

Dann gilt:

$$\int\limits_M \omega := \sum_{i\in I} \int\limits_{U_i} \omega_i = \sum_{i\in I} \int\limits_{V_i} (\varphi^{-1})^*\omega_i \tag{16.251}$$

16.10.28 Notationen/Definitionen zu kompakten Trägern

Sei $\operatorname{supp}(f)$ der Träger von f. Wir sagen, dass f einen kompakten Tränger hat, wenn $\operatorname{supp}(f)$ kompakt ist. Ausserdem definieren wir:

$$\mathcal{C}_c(U) = \{f\colon U \to \mathbb{R}, \text{ stetig mit kompakten Trägers }\} \tag{16.252}$$

Beispiel, warum Beschränktheit nicht genügt Seien $U = [0,1[$ beschränkt und $f(x) = x$. Dann ist $f \notin \mathcal{C}_c(U)$ also ist $\operatorname{supp}(f) = U$ nicht kompkakt.

16.11 Teilung der Eins / partition of unity

16.11.1 Definition der Teilung der Eins

Seien M eine Untermannigfaltigkeit und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Übereckung von M. Dann ist eine *stetige* beziehungsweise *glatte Teilung der 1* eine Familie von stetigen beziehungsweise glatten Funktionen $(\varphi_i)_{i\in I}$, $\varphi_i\colon M \to \mathbb{R}$ mit:

1. $\operatorname{supp}(\varphi_1) \subset U_i$
2. $\varphi_i(x) \geq 0 \,\forall\, x \in M$
3. $\sum_{i\in I} \varphi_i(x) = 1 \,\forall\, x \in M$

16.11.2 Definition von lokal-endlichen Überdeckungen

Sei M eine Untermannigfaltigkeit, dann heißt eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ heißt *lokal-endlich*, falls für alle $p \in M$ gilt:
Es existiert eine offene Umgebung W mit $p \in W \subset M$ mit:

$$\{i \in I\colon W \cap U_i \neq \emptyset\} \tag{16.253}$$

ist endlich.

16.11.2.1 Beispiele

Sei $M = \mathbb{R}$.

1. Sei weiterhin $(U_k)_{k\in\mathbb{R}}$ eine offene Überdeckung mit $U_k = \{x\colon x > k\}$. Dann sind die offenen Überdeckungen nicht lokal-endlich, da $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $x \in U_k$ mit unendlich vielen k's.
2. Sei weiterhin $(U_k)_{k\in\mathbb{R}}$ eine offene Überdeckung mit $U_k = \{x\colon k+2 > x > k\}$. Dann sind die offenen Überdeckungen lokal-endlich, da $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt, dass x in zwei U_k's ist.

16.11.3 Satz über die lokal-endliche Verfeinerung von offenen Überdeckungen

Seien M eine Untermannigfaltigkeit und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung. Dann existiert eine *lokal-endliche Verfeinerung*, das heißt es existiert eine offene Überdeckung $(V_j)_{j\in J}$ mit:

1. $(V_j)_{j\in J}$ ist lokal-endlich
2. $\forall\, j \in J \,\exists\, i \in I\colon V_j \subset U_i$

Der Beweis bleibt dem geneigten Leser als Übung überlassen.

Notation Ein M wie in 16.11.3 nennen wir *parakompakt*.

Folgerung Für jede Untermannigfaltigkeit existiert eine Familie von offenen Mengen $(U_i)_{i\in I}$ mit $U_i \subset M$, $V_i \subset \mathbb{R}^d$ offen und ein Diffeomorphismus $\varphi_i \colon U_i \to V_I$ so, dass:

$$\bigcup_{i\in I} U_i = M \tag{16.254}$$

Und:

$$\forall\, p \in M\, \exists\, \omega(p) \colon \{i \in I \colon W \cap U_i \neq \emptyset \tag{16.255}$$

ist endlich.

16.11.4 Definition einer guten Teilung der Eins

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Eine *gute Teilung der Eins* ist eine Familie von glatten Funktionen $\varphi_i \colon X \to \mathbb{R}$ so, dass es in X offene Mengen U_i und Diffeomorphismen $\psi_i \colon U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^d$ offen mit:

1. $\varphi(x) \geq 0 \forall x$
2. $\sum_{i\in I} \varphi_i(x) = 1 \forall x$
3. Der Träger

   $$\operatorname{supp}(\varphi_i) = \overline{\{x \in X \colon \varphi_i(x) > 0\}} \tag{16.256}$$

   ist kompakt und $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subset U_i$.
4. $(U_i)_{i\in I}$ ist eine lokal-endliche Überdeckung.

<u>1. Schritt:</u> Jede offene Überdeckung besitzt eine lokal-endliche Verfeinerung, ist also parakompakt.

Beweis Siehe Literatur.

16.11.5 Satz über die Existenz von guten Teilungen der Eins

Jede Untermannigfaltigkeit besitzt eine gute Teilung der Eins.

16.11.5.1 Folgerung Jede orientierte Untermannigfaltigkeit X besitzt eine Orientierungsform.

Beweisidee (Folgerung) Lokal ist die Existenz klar: Sei $p \in X$ mit $p \in U \underset{\varphi}{\simeq} V \subset \mathbb{R}^d$. Wähle Orientierungsform ω als $\varphi * dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$ je nachdem ob φ orientierunserhaltend oder -umkehrend ist.

Philosophie Die Teilung der Eins erlaubt uns aus lokalen Konstruktionen globale Konstruktionen zu folgern. Wähle eine gute Teilung der Eins, Orientierungsformen ω_i auf U_i. Definiere:

$$\omega := \sum_i \varphi_i \tilde{\omega}_i \text{ mit } \tilde{\omega}_i = \begin{cases} w_i, & \text{auf } U_i \\ 0, & \text{außerhalb von } U_i \end{cases} \tag{16.257}$$

16.11.6 Lemma über die Glattheit der trivialen Fortsetung

Seien X Untermannigfaltigkeit $U \subset X$ offen, f glatt mit kompaktem Träger in U also $f \in \mathcal{C}_c(u)$. Dann gilt, dass die triviale Fortsetzung

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \forall\, x \in U \\ 0, & \forall\, x \in X \setminus U \end{cases} \tag{16.258}$$

glatt auf X ist.

Beweis Wenn $x \in U$, dann gilt:

$$\tilde{f}\Big|_U = f\Big|_U \Rightarrow \tilde{f} \text{ ist glatt in } x \tag{16.259}$$

Ist $x_0 \notin U$, dann gilt $\tilde{f}(x_0)$. Weil jedoch f einen kompakten Träger in U hat, ist:

$$\overline{\{x \in X \colon f(x) \neq 0\}} = \overline{\{x \in U \colon f(x) \neq 0\}} \tag{16.260}$$

kompakt und insbesondere abgeschlossen in X. Also können wir eine offene Menge, nämlich

$$W := X \setminus \overline{\{x \in X \colon f(x) \neq 0\}} \tag{16.261}$$

finden. Dann ist für $x_0 \in W$ $\tilde{f}$ konstant Null auf W. Da konstante Funktionen glatt sind folgt die Aussage, außerdem können wir $\tilde{f} \in \mathcal{C}_c^\infty(X)$ schreiben.

16.11.7 Lemma über die Glattheit einer speziellen e-Funktion

Die durch

$$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x > 0 \\ 0, \text{ falls } x < 0 \end{cases} \tag{16.262}$$

definierte Funktion ist glatt auf $\mathbb{R}$.

Beweis Man zeige durch Induktion:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\, \exists \text{ rationale Fktn. } R_n \colon h^{(n)}(x) = R_n(x)h(x)\, \forall\, x > 0 \tag{16.263}$$

weil

$$(R_n(x)h(x))' = R_n'(x)h(x) + R_n(x)h'(x) = R_n h(x) + R_n(x)\left(\frac{2}{x^3}\right)h(x) = h(x)\left(R_n' + R_n\frac{2}{x^3}\right) \tag{16.264}$$

Ebenfalls durch Induktion mit l'Hopital:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \tag{16.265}$$

Daraus folgt:

$$\lim_{x\to 0} h^{(n)}(x) = 0\, \forall\, n \tag{16.266}$$

Also gilt für alle n, dass $h^(n)(x)$ in 0 differenzierbar mit

$$h^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{h^{(n)}(x) - h^{(n)}(0)}{x} = 0s \tag{16.267}$$

ist. Also ist h in 0 unendlich oft differenzierbar.

16.11.8 Eindimensionales Konstruktionslemma

Sei h wie in 16.11.7. Wir definieren $g(x) \coloneqq h(x+1)h(1-x)$. Dann gilt, dass g glatt und $g(x) \geq 0$ für alle x ist und:

$$\{x \colon g(x) > 0\} =]-1, 1[\tag{16.268}$$

Beweis Für $x < -1$ gilt:

$$x + 1 < 0 \Rightarrow h(x+1) = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \tag{16.269}$$

Für $-1 < x < 1$ gilt:

$$x + 1 > 0, x < 1 \Rightarrow 1 - x > 0 \Rightarrow h(x+1)h(1-x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0 \tag{16.270}$$

Für $1 < x$ gilt:

$$1 - x < 0 \Rightarrow (1-x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \tag{16.271}$$

16.11.9 Mehrdimensionales Konstruktionslemma

Sei $p \in \mathbb{R}^n, r > 0$. Dann existiert ein $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(x) \geq 0$ für alle x und:

$$\{x\colon \chi(x) > 0\} = \{x\colon \|x-p\| < r\} \tag{16.272}$$

Beweis Setze:

$$\chi(x) \coloneqq g\left(\left(\frac{\|x-p\|}{r}\right)^2\right) \tag{16.273}$$

Dann gilt:

$$\|x-p\| < r \Leftrightarrow \frac{\|x-p\|}{r} < 1 \Leftrightarrow g\left(\left(\frac{\|x-p\|}{r}\right)^2\right) > 0 \tag{16.274}$$

16.11.10 Lemma über die Eigenschaften der mehrdimensionalen Kosntruktion

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $p \in U$. Dann existiert ein $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$[1]:

1. $\chi(x) \geq 0 \,\forall\, x$
2. $\chi(p) > 0$

Beweis

16.11.11 Beweis des Satzes 16.11.5 über die gute Teilung der Eins

Da X Untermannigfaltigkeit ist, folgt, dass eine offene Überdeckung durch $U_i \xrightarrow{\psi_i} \subset \mathbb{R}^d \,\forall\, i$ existiert. Durch Argumente aus der Literatur folgt, dass es eine lokal-endliche Verfeinerung gibt, das heißt o.B.d.A.:

$$\forall p \in X \;\exists\, W_i\colon \{i \in I\colon W \cap U_i \neq \emptyset\} \tag{16.275}$$

ist endlich. Für jeden Index i und jeden Punkt $p \in U_i$ wählen wir eine Funktion $\chi_{p,i}$ folgendermaßen:
Nach Lemma 16.11.10 gilt:

$$\exists \tilde{\chi}_{p,i} \in \mathcal{C}_c^\infty(V_i) \text{ mit} \tag{16.276}$$

$$\tilde{\chi}_{p,i}(\chi_i(p)) > 0, \tilde{\chi}_{p,i} \geq 0 \text{ überall} \tag{16.277}$$

[1]Das heißt $\overline{\{x \in U\colon \chi(x) \neq 0\}}$ ist kompakt.

$\chi_{p,i} \in \mathcal{C}^\infty(x)$ ist die triviale Fortsetzung von $\tilde{\chi}_{p,i} \circ \psi_i$, dass heißt:

$$\chi_{p,i}(x) = \begin{cases} \tilde{\chi}_{p,i}(\psi_i(x)), & \text{falls } x \in U_i \\ 0, & \text{falls } x \in X \setminus U_i \end{cases} \tag{16.278}$$

Nach Lemma 16.11.6 ist $\chi_{p,i}$ glatt auf x. Bei der Wahl der offenen Überdeckung U_i können wir verlangen, dass $\overline{U}$ kompakt für alle i ist.
Also:O.B.d.A. gilt: $\overline{U_i}$ kompakt.
Wir definieren ρ_i als den Abstand zum Rand von U_i. Genauer (mithilfe der euklidischen Norm):

$$\rho_i(x) = \min_{y \in \overline{U_i} \setminus U_i} \|x - y\| \tag{16.279}$$

$$\tilde{\rho}_i(x) := \begin{cases} \rho_i(x), & \text{falls } x \in U \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{16.280}$$

Es gilt, dass $\tilde{\rho}_i$ stetig auf X und $\{x \colon \tilde{\rho}_i(x) > 0\} = U_i$ ist. Da $(U_i)_i$ lokal-endlich ist, gilt für alle x:

$$\{i \colon \tilde{\rho}_i > 0\} \tag{16.281}$$

ist endlich und:

$$c_i := \{x \in U_i \colon \tilde{\rho}_i(x) = max_j \tilde{\rho}_j(x)\} \tag{16.282}$$

Hilfsbehauptung Für alle i gilt: $C_i \subset U_i$ und C_i kompakt. Daraus folgt, dass $x \in C_i$, also $\tilde{\rho}_i > 0$ also $x \in U_i$.

Beweis der Hilfsbehauptung Sei x_n Folge aus C_i. Da $\overline{U_i}$ kompakt und $C_i \subset U_i$ gilt o.B.d.A.:

$$\lim_{k \to +\infty} x_n = x \in \overline{U_i} \subset X \tag{16.283}$$

also die Konvergenz von x_n. Also folgt für $x_1 \in C_i \, \forall \, n$:

$$\forall \, j, n \colon \tilde{\rho}_i(x_n) \geq \tilde{\rho}_j(x_n) \tag{16.284}$$
$$\Rightarrow \; \forall \, j \colon \tilde{\rho}_i(x) \geq \tilde{\rho}_i(x) \tag{16.285}$$

weil $\tilde{\rho}_i, \tilde{\rho}_j$stetig sind

$$\Rightarrow x \in C_i \tag{16.286}$$

Also ist C_i kompakt

HB

Bemerkung Aus der Definition der C_i folgt weiter für alle $x \in X$:

$$\exists\, i\colon \tilde{\rho}_i(x) = \max_j \tilde{\rho}_i(x) \Rightarrow \exists\, i\colon x \in C_i \Rightarrow X = \bigcup_i C_i \tag{16.287}$$

Da alle C_i kompakt sind gibt es endlich viele Punkte $p_{i_1}, \dots, p_{i_s}$ so, dass:

$$C_i \subset \{\chi_{p_{i_1,i}} \neq 0\} \cup \cdots \cup \chi_{p_{i_s,i}} \neq 0\} \tag{16.288}$$

Betrachte die Familie dieser $\chi_{p_{i_1,i}}$. Dann gilt:

1. $\forall x \in X\, \exists\, \chi_{p_{i_k,i}}(x) \neq 0$ weil $\exists\, i\colon x \in C_i$.
2. $\{\chi_{p_{i_k,i}} \neq 0\}_k$ ist lokal-endlich, weil $(U_i)_i$ lokal-endlich ist.

16.11.11.1 Zwischenbilanz Sei $\eta_m = \chi_{p_{i_k,i}}$. Es existiert eine Familie $(\eta_m)_m$ von Funktionen mit:

1. $\eta_m \in \mathcal{C}_c^\infty(X)$
2. $\eta_M(x) \geq 0\, \forall\, x$
3. $\forall\, x\, \exists\, m\colon \eta_m(x) > 0$
4. $\forall\, m\colon\ \exists\, U \xrightarrow{\chi} V\colon \overline{\{\eta_m \neq 0\}} \subset U$
5. $\forall\, x \in X\, \exists\, W\colon \{m\colon W \cap \operatorname{supp}(\eta_m) \neq \emptyset\}$ ist endlich.

Definiere

$$\alpha(x) = \sum_m \eta_m(x) \tag{16.289}$$

α ist glatt wegen 1. und 5. und es gilt $\alpha(x) > 0$ wegen 2. und 3. . Nun setzen wir (wohldefiniert, da $\alpha(x) > 0$ ist):

$$\varphi_m(x) = \frac{\eta_m(x)}{\alpha(x)} \tag{16.290}$$

Somit erfüllt φ_m immer noch 1. - 5. und zusätzlich gilt:

$$\sum_m \varphi_m(x) = 1 \forall x \tag{16.291}$$